华章数学译丛



63

WILEY

Mathematical Finance

数理金融

[美] M. J. 阿尔哈比 (M. J. Alhabeeb) 著

温建宁 译



华章数学译丛

63

Mathematical Finance

数理金融

[美] M. J. 阿尔哈比 (M. J. Alhabeeb) 著

温建宁 译



机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

数理金融／（美）M. J. 阿尔哈比（M. J. Alhabeeb）著；温建宁译．—北京：机械工业出版社，2017.11

（华章数学译丛）

书名原文：Mathematical Finance

ISBN 978-7-111-58379-0

I. 数… II. ① M… ② 温… III. 金融学－数理经济学 IV. F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 266217 号

本书版权登记号：图字 01-2012-7583

本书从对数、回归、统计测量等最基本的数学概念出发，通过介绍单利、银行贴现、复利、年金等知识来探索货币的时间价值．书中涵盖各种金融方案，包括抵押债券、租赁、信贷、资本预算、折旧、损耗、盈亏平衡分析、杠杆作用、收益与风险、资本资产定价模型、生存年金、意外保险．

本书偏重于金融数学，已经经过广泛的课堂检验，叙述通俗易懂，而且有大量的习题和示例，非常适合商务、经济、金融等专业的高年级本科生或研究生用作“数理金融”的入门教材，也适合那些想更好地理解金融问题、做出金融选择的消费者和企业家阅读参考．

出版发行：机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码：100037）

责任编辑：和 静　　责任校对：李秋荣

印　　刷：北京瑞德印刷有限公司　　版　　次：2018 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

开　　本：186mm × 240mm 1/16　　印　　张：23

书　　号：ISBN 978-7-111-58379-0　　定　　价：89.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

客服热线：(010) 88378991 88361066　　投稿热线：(010) 88379604

购书热线：(010) 68326294 88379649 68995259　　读者信箱：hzjsj@hzbook.com

译 者 序

这是一本面向金融、经济和统计专业的数学教材，主要定位为大二、大三学生学习高等数学、概率论、数理统计之后的提升，目的是引导学生掌握量化分析的思想和方法，培养金融背景和统计知识相融合的逻辑思维，进一步提高对宏观经济分析和资本市场预测的能力.

概括起来，本书有如下几个特点：(1) 让读者容易看懂、快速上手实践，符合循序渐进、由浅入深的认知原则；(2) 让学生方便模仿、举一反三，符合讲授结合、教学相长的教育原则；(3) 让教师便于教学、兼顾理论实践，平衡通识教育、专识教育的不同要求.

我要对 Alhabeeb 教授表示感谢，正是因为他杰出的学术成就以及严谨治学的态度，才有了这本优秀书籍，才有了这本译著. 我还要致谢孙萌、梅振、陈薇、吴范君、孔超、袁祎玮、魏永川、徐波樱、闫沐童、肖雨鸽、鲜佩伶、杨欣芸、曹涵琪、蔡立君、胡伟伟、顾媛媛等，正是因为他们一丝不苟的认真阅读和专心致志的细心校对，才保证了译著尽可能低的差错率. 我还要致谢自己的亲人们，正是老父亲和姐姐的热心鼓励以及爱人和女儿的不懈支持，才让我排除各种干扰，一心一意把翻译工作顺利完成，书稿最终出版发行最大的成就该归功于他们.

百密难免一疏. 纵使译者追求完美，但书中难免错漏，还望读者不吝赐教，把宝贵的意见和建议反馈给我，以便书稿更加完善.

温建宁　于上海立信会计金融学院

前　言

我教授大学金融学课程已有数十年的时间，这些从教经历使我亲眼看到大部分学生如何面对数学上的困难，又如何把自己不能熟练掌握数量分析视为他们求学生涯中的重大障碍．他们惯常做出的努力恰恰证明了这一点，这既是他们学习过程中的一个阻碍因素，也是后来当他们步入职业生涯时变得更加难以弥补的差距．面对通行的标准数学教材，我的学生常常表现出不自信，充满挫折感，这是因为这些教材通常聚焦于数学技巧，而金融学和金融主题却被搁置一边．我希望这本书能颠覆那些书的写作方法，把焦点放在金融学和金融问题上——但是要采用计算意识和数学语言．换句话说，我想把重点重新定位于以数学方法作为工具对主要金融问题的解答上．我热切期望这种做法能满足学生的主要学习目的之一，帮助他们轻松地踏上较高水平的学术征程，为他们提供毕业后依然有帮助的基础能力．这本书是长期课堂教学经验和课堂教学累积起来的知识体系的一种直接反映，并根据学生学习模式和教育需求的多样性进行了改进．特别审慎地，我的主要注意力已经被导向数学公式扮演的角色，以证明和阐述问题求解背后的基本数理逻辑．这给学生提供了额外的机会，以便于巩固他们对金融问题的理解，使其能够分析和解释金融问题的解．另外，在这本书中对数学公式也采用了传统的表值．

当计算器和计算机变得日益精密和普及，而且每个学生都可以使用时，后退一步再次强调利用传统数学方法的必要性似乎是明显而又实际的．不管计算机在我们的生活中如何重要，加强对理论的理解既是本质需要，也是一种基本学习能力，不应该在计算机水平提高时丧失．正因为这个理由，本书中使用传统方法意味着寻求平衡，即在日益复杂的数字程序的广泛使用和问题求解的方法之间达成平衡．每个学生可能都拥有的标准金融计算器也是技术进步的一方面．尽管这些计算器对学生有巨大的帮助，但是也减少了解决复杂问题的基本方法的系统学习过程．高级计算器的使用日益增加，意味着不需要了解问题的基础结构，或者不需要理解运算背后的科学逻辑，就能学会如何敲击正确的键．为此，本书有意识地跳过金融计算器和计算机的使用，以切断对那些容易且盲目的解决方法的依赖，回归到公式和表格的应用上来．和经典的金融数学书籍不同，本书几乎很少强调公式的推导和证明，若有涉及则是因为在某些情况下它们之间存在强相关性．

本书的目标读者主要是商学院、公共管理学院、经济学院以及其他相关专业的高年级本科生和一年级研究生．本书也对准备参加精算师考试、CFP、ChFC、CPA、CLU、PFS 和 AFC 等职业考试的考生们大有帮助，同时是各领域的研究人员和市场分析人员的宝贵参考书．书中内容都是一般性理解金融领域和所有与金融商业相关的领域所必不可少的．

多年来，我一直认为在一学期的金融学课程中不能覆盖大量议题，现有教材的特性通常也不允许授课老师在一般性的概念阐述和基本分析之外进行严密分析．在每个金融话题中通常没有机会或者几乎很少有机会能深入到问题的数学处理和解决问题的细节层面．本书的严谨论述为使用更加深奥的金融计算方法提供了机会，既可用于面向金融的数学方法的单独教程，也可用于现有常规金融教程的特定范畴．而且，据我所知，本书是第一本全

面阐述数理金融的教材，覆盖公司金融、创业金融以及个人金融等主要话题，体现了我 20 年来教授诸多金融课程的顶尖水平. 本书包含充实、全面和均衡的教学内容，覆盖了金融应用的整个范围，包括许多已经给出解答的例题，所有的例题都是从现实生活问题中构造的应用题，用以强调教学内容的应用属性，与典型的数学方法强调探索和证明的技术细节截然不同. 因为内容的理论特性，书中的语言叙述和表达方法都能很好地推广. 我尽量用简练直观的语言写作本书，采用简易友好的写作方式使数学内容几乎不“吓人”，而且对书中主要的数学问题做了流畅的处理. 我选择的论述方式是首先展示基本的理论概念，接下来通过一步一步解答例题，把概念结构转变成数量形式. 因为我相信，在数学应用领域，要是没有解答过习题，没有实际的解题训练，仅仅通过阅读获得深厚的知识和稳固的技能是不可能的. 本书每一单元都以概念小结、公式列表和大量的练习结束.

本书的内容被划分成了 8 个单元. 单元一是唤醒读者基本概念记忆的数学介绍，这些数学基础概念与本书后续讨论的金融主题相关. 这个单元包括数、指数和对数，数列以及统计度量三个章节. 单元二讨论货币时间价值，包括单利、银行贴现、复利和年金四个章节. 单元三是债务和租赁，包括信用和贷款、抵押债券和租赁三个章节. 单元四是资本预算和折旧，包括资本预算、折旧和损耗两章. 单元五包括盈亏平衡分析和杠杆效应两章. 单元六是投资，用五章篇幅讨论了股票、债券、共同基金、期权、资本成本和比率分析. 单元七包括回报和风险的测量以及资本资产定价模型两章. 单元八是保险，包括生存年金、人寿保险、财产和意外保险三章. 附录包括完成例题和练习所需要的数学用表.

在本书完成之际，我要感谢许多人的帮助，他们对本书面世有建设性贡献. 书中可能遗留了不少错误和缺点，这些都由我独自负责. 首先，我真心实意地感谢我的学生，感谢他们的勤学、好问、乐善、奋斗和忧思，他们对我课堂教学中的疏漏予以更正，甚至他们在考试中所犯的致命错误都是本书写作的灵感，要是缺失了这些灵感，本书就不可能被写出来. 我还要对我的同事和朋友 Joe Moffitt 教授的支持致谢，对我的朋友 Sev Yates 真诚的支持和持续鼓励致谢. 特别要感谢 Wiley 公司从头到尾管理这个项目的编辑 Susanne Steitz-Filler，她工作起来非常专业，而且能力非凡. 还要感谢 Wiley 公司的 Jackie Palmieri 和 Rosalyn Farkas，以及 Laserwords 的项目经理 Romaine Heldt，感谢他们尽心的工作和奉献. 我也要感谢我系高级秘书 Peg Cialek 的专业支持，她不知疲倦地凭借能力和耐心以及对数学符号敏锐的眼力录入了全部书稿. 还要特别感谢我从前的研究生助理 Don Hedeman，因为他出色地绘制了所有精美的图表. 我也特别感谢我从前的本科生 Heather Sullivan，他现在是波士顿令人骄傲的高级金融分析师. Heather 把他的课堂笔记给了我，他做的课堂笔记比我自己的笔记更整洁、更有条理，被用作本书的手稿. 我深深感谢我的朋友——才华横溢的艺术家 Anna Kubaszewska，她根据我苛刻的要求绘制了漂亮的封面. 最后，我要感谢原稿的所有匿名审稿人，感谢他们有用的、建设性的评论和建议.

M. J. Alhabeeb
于马萨诸塞州贝勒塞屯

目　录

译者序

前言

单元一　数学简介

第1章　数、指数和对数 …… 2

1.1　数 …… 2

1.2　分数 …… 2

1.3　小数 …… 4

1.4　循环数 …… 4

1.5　百分数 …… 5

1.6　基、百分率和百分量 …… 6

1.7　比率 …… 6

1.8　比例 …… 7

1.9　整除数 …… 7

1.10　指数 …… 8

1.11　指数律 …… 8

1.12　指数函数 …… 9

1.13　自然指数函数 …… 10

1.14　自然指数律 …… 11

1.15　科学计数 …… 11

1.16　对数 …… 11

1.17　对数律 …… 12

1.18　特征、尾数和反对数 …… 12

1.19　对数函数 …… 13

第2章　数列 …… 15

2.1　等差数列 …… 15

2.2　等比数列 …… 17

2.3　递推数列 …… 19

2.4　无穷等比数列 …… 20

2.5　增长和衰减曲线 …… 20

2.6　具有自然对数底的增长和衰减函数 …… 24

第3章　统计度量 …… 25

3.1　基本组合原则和概念 …… 25

3.2　排列 …… 26

3.3　组合 …… 28

3.4　概率 …… 29

3.5　数学期望和期望值 …… 31

3.6　方差 …… 32

3.7　标准差 …… 34

3.8　协方差 …… 35

3.9　相关系数 …… 35

3.10　正态分布 …… 36

单元一附录 …… 38

单元二　货币时间价值

导言 …… 44

第1章　单利 …… 46

1.1　总利息 …… 46

1.2　利息率 …… 46

1.3　到期期限 …… 46

1.4　现值 …… 47

1.5　将来值 …… 47

1.6　现值和将来值都已知，求利息率（r）和到期期限（n） …… 47

1.7　简单贴现 …… 48

1.8　计算用天表示的期限 …… 49

1.9　名义利率和实际利率 …… 50

1.10　名义利率和实际利率相互变换 …… 50

1.11　假定起息日和价值等式 …… 51

1.12　等值时：求平均到期日 …… 53

1.13　分批付款 …… 54

1.14　用美元加权方法求简单利息率 …… 55

第2章　银行贴现 …… 57

2.1　用贴现公式求FV …… 57

2.2　求贴现期限和贴现率 …… 58

2.3　简单贴现和银行贴现之间的差异 …… 58

2.4　利息率和贴现率的比较 …… 59

2.5 贴现一张本票 …… 60
2.6 贴现短期国债 …… 62
第3章 复利 …… 64
3.1 复合公式 …… 65
3.2 求现值 …… 66
3.3 贴现因子 …… 67
3.4 求复合利息率 …… 68
3.5 求组合期限 …… 69
3.6 72定律和其他定律 …… 69
3.7 有效利率 …… 70
3.8 复合的类型 …… 71
3.9 连续复利 …… 72
3.10 复合利率价值方程 …… 73
3.11 复利的等量时 …… 74
第4章 年金 …… 76
4.1 年金的类型 …… 76
4.2 普通年金的将来值 …… 76
4.3 普通年金的现值 …… 78
4.4 求普通年金的支付额 …… 80
4.5 求普通年金的期限 …… 81
4.6 求普通年金的利率 …… 82
4.7 期初应付年金：将来值和现值 …… 83
4.8 求期初应付年金的支付额 …… 84
4.9 求期初应付年金的期限 …… 85
4.10 延期年金 …… 86
4.11 延期年金的将来值和现值 …… 87
4.12 永续年金 …… 88
单元二附录 …… 89

单元三 债务和租赁

第1章 信用和贷款 …… 98
1.1 债务类型 …… 98
1.2 动态本利比 …… 98
1.3 提前付清 …… 101
1.4 评估利息和构建支付 …… 103
1.5 信贷费用 …… 105
1.6 信贷费和每日平均存款余额 …… 107
1.7 信贷限额与债务限额 …… 108
第2章 抵押债券 …… 110
2.1 分期偿还分析 …… 110
2.2 利率、期限和按月支付分期付款的首付的影响 …… 114
2.3 渐进支付抵押贷款 …… 116
2.4 抵押点和有效利率 …… 118
2.5 承担抵押贷款 …… 119
2.6 抵押贷款提前还款罚金 …… 119
2.7 再融资抵押贷款 …… 120
2.8 重叠支付贷款和气球支付贷款 …… 121
2.9 偿债基金 …… 122
2.10 比较分期付款和偿债基金方法 …… 125
第3章 租赁 …… 126
3.1 对承租人 …… 126
3.2 对出租人 …… 130
单元三附录 …… 132

单元四 资本预算和折旧

第1章 资本预算 …… 138
1.1 净现值 …… 138
1.2 内部回报率 …… 140
1.3 盈利指数 …… 141
1.4 资本化和资本化成本 …… 142
1.5 其他资本预算的方法 …… 144
第2章 折旧和损耗 …… 146
2.1 直线方法 …… 147
2.2 固定比例方法 …… 149
2.3 数位总和方法 …… 151
2.4 分期偿还方法 …… 153
2.5 偿债基金方法 …… 154
2.6 综合率和综合年限 …… 155
2.7 损耗 …… 158
单元四附录 …… 160

单元五 盈亏平衡点和杠杆作用

第1章 盈亏平衡分析 …… 166
1.1 衍生的盈亏平衡产量和盈亏

平衡收益 …… 166
1.2 BEQ 和 BER 变量 …… 167
1.3 现金盈亏平衡技巧 …… 169
1.4 盈亏平衡点和目标利润 …… 170
1.5 盈亏平衡点的代数方法 …… 171
1.6 借款时的盈亏平衡点 …… 174
1.7 双重盈亏平衡点 …… 176
1.8 盈亏平衡点的其他应用 …… 178
1.9 BEQ 和 BER 对变量的灵敏性 …… 181
1.10 盈亏平衡分析的使用和局限 …… 181
第 2 章 杠杆效应 …… 183
2.1 运营杠杆 …… 183
2.2 运营杠杆、固定成本和商业风险 …… 185
2.3 财务杠杆 …… 186
2.4 总杠杆或组合杠杆 …… 190
单元五附录 …… 192

单元六 投资

第 1 章 股票 …… 198
1.1 买卖股票 …… 198
1.2 普通股估价 …… 200
1.3 新发行普通股的成本 …… 204
1.4 具有两个阶段股息增长的股票价值 …… 204
1.5 通过 CAPM 模型计算股票成本 …… 205
1.6 普通股估价的其他方法 …… 205
1.7 优先股价值 …… 206
1.8 优先股费用 …… 206
第 2 章 债券 …… 208
2.1 债券估价 …… 208
2.2 折价和溢价 …… 210
2.3 溢价分期 …… 212
2.4 累积贴现 …… 213
2.5 利息日之间债券购买价格 …… 215
2.6 收益率估计 …… 216
2.7 久期 …… 219
第 3 章 共同基金 …… 221
3.1 基金估价 …… 221
3.2 负荷 …… 222
3.3 性能测量 …… 222
3.4 系统风险的影响 …… 226
3.5 定期定额 …… 227
第 4 章 期权 …… 229
4.1 用期权动态盈利 …… 230
4.2 看涨和看跌期权的内在价值 …… 231
4.3 看涨和看跌期权的时间价值 …… 233
4.4 Delta 比率 …… 234
4.5 期权价值的决定因素 …… 235
4.6 期权估价 …… 236
4.7 期权组合的内在价值 …… 237
第 5 章 资本成本和比率分析 …… 240
5.1 资本的税前和税后成本 …… 240
5.2 资本加权平均成本 …… 240
5.3 比率分析 …… 241
5.4 杜邦模型 …… 251
5.5 比率后记 …… 252
单元六附录 …… 253

单元七 回报和风险

第 1 章 回报和风险的测量 …… 260
1.1 预期回报率 …… 260
1.2 风险度量 …… 261
1.3 风险规避和风险溢价 …… 265
1.4 投资组合层次的回报和风险 …… 265
1.5 马科维茨两资产投资组合 …… 272
1.6 无风险回报率借贷 …… 274
1.7 风险类型 …… 274
第 2 章 资本资产定价模型 …… 276
2.1 金融 β …… 276
2.2 CAPM 公式 …… 278
2.3 证券市场线 …… 279
2.4 根据风险厌恶程度转动 SML …… 281
单元七附录 …… 284

单元八 保险

第 1 章 生存年金 …… 288
1.1 死亡率表 …… 288

1.2 赔偿条款 …… 291
1.3 生存保险 …… 292
1.4 生存年金的种类 …… 293
第 2 章 人寿保险 …… 300
2.1 终身人寿保单 …… 300
2.2 年保费：终身的基础 …… 301
2.3 年保费：m 次支付的基础 …… 301
2.4 递延终身人寿保单 …… 302
2.5 递延年保费：终身的基础 …… 303
2.6 递延年保费：m 次支付的基础 …… 303
2.7 定期人寿保单 …… 304
2.8 养老保险政策 …… 305
2.9 养老保单的年保费 …… 306
2.10 少于年保费 …… 307
2.11 自然保费与水平保费 …… 307
2.12 储备金和终端储备 …… 309
2.13 终端储备的好处 …… 311
2.14 应该买多少人寿保险 …… 312
第 3 章 财产和意外保险 …… 315
3.1 免赔额和共同保险 …… 316
3.2 医疗保险 …… 317
3.3 政策限制 …… 318
单元八附录 …… 320

附录 …… 324
参考文献 …… 354

单元一 *Unit 1*

数学简介

第 1 章　数、指数和对数

第 2 章　数列

第 3 章　统计度量

第1章　数、指数和对数

1.1　数

在金融领域，理解好数、分数和小数是极其重要的. 利率、时间、金融比率通常都用分数和小数表示，特别是进行计算题求解的时候，这里也是绝大多数常见错误发生的地方. 我们常见的普通数，例如3，-5和0，称为**整数**(见图1-1). 整数连同分数就构成了**有理数**. 相反，**无理数**则是无限而不循环的数，例如$\sqrt{3}$和e. 有理数和无理数统称为**实数**，与实数相对的数则是非实数，或称为**虚数**，例如-1的平方根($\sqrt{-1}$)以及它的倍数(如$4\sqrt{-1}$).

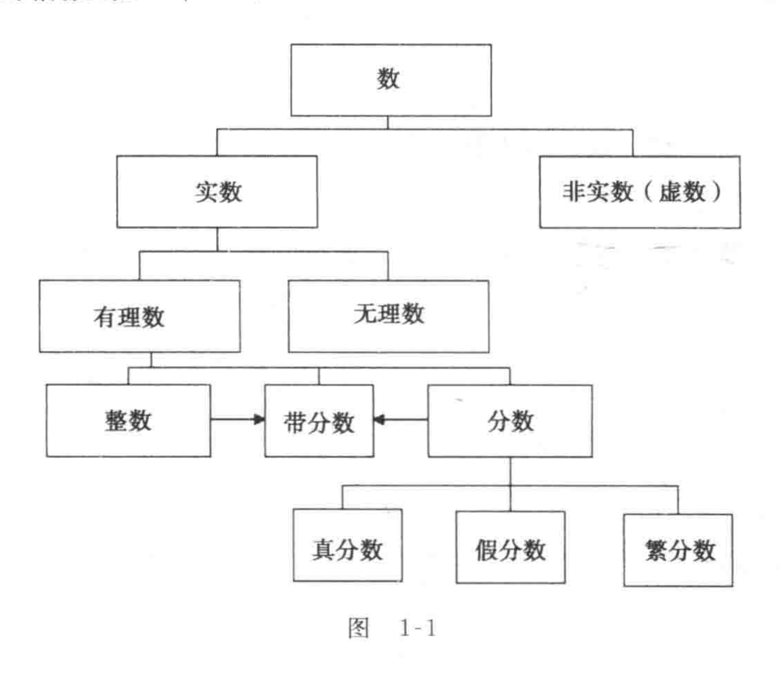


图　1-1

1.2　分数

分数指的是整数的一部分，表示为分子(分数线上面的数)被分母所除(分数线下面的数). 例如，分数$\frac{3}{8}$可以表示一个被切成八块的披萨饼，取其中三块. 因此，没有用零做分母的分数，因为我们无法从什么都没有中取其部分，零做分子的分数也没有意义. 一般来讲，分数的分子比分母要小，这样的分数称为**真分数**，例如$\frac{2}{5}$或者$\frac{13}{20}$. 当分子比分母大的时候，这样的分数称为**假分数**，例如$\frac{10}{8}$或者$\frac{5}{4}$，表示一个超过整体的部分数，犹如10

块披萨饼，将构成一个披萨饼又多出四分之一：$\frac{10}{8}=\frac{8}{8}+\frac{2}{8}=1\frac{1}{4}$. 形如 $1\frac{1}{4}$ 的数称为**带分数**，可以看做一个整数(1)和一个真分数$\left(\frac{1}{4}\right)$的组合数. 要是分子和分母相等，它们将构成整数 1，这不是分数. 要么分子或者分母包含分数，要么二者都包含分数，这样的分数称为**繁分数**，例如

$$\frac{\frac{5}{8}}{9},\frac{2}{\frac{3}{7}},\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{8}}$$

分数最明显的特征之一就是分数值的不变性，即如果我们用相同的数去乘或除分子和分母两项，得到分子和分母被放大所构成的放大项分数，与二者被缩小所构成的缩小项分数相等，并等于原分数的值.

例 1.2.1　把$\frac{2}{3}$变成放大项的分数，并且把$\frac{9}{15}$变成缩小项的分数.

我们可以用 5 同乘以分子和分母，把第一个分数放大成为放大项的分数：

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times 5}{3\times 5}=\frac{10}{15}$$

并且，我们可以将分子和分母同除以 3，把第二个分数缩小为缩小项的分数：

$$\frac{9}{15}=\frac{9\div 3}{15\div 3}=\frac{3}{5}$$

一个整数和一个分数的组合(即带分数)也可以记作一个假分数.

例 1.2.2　把带分数 $2\frac{5}{6}$ 转变为分数.

$$2\frac{5}{6}=\frac{(6\times 2)+5}{6}=\frac{17}{6}$$

例 1.2.3　把分数$\frac{14}{3}$转变为带分数.

$$\frac{14}{3}=14\div 3=4+\frac{2}{3}=4\frac{2}{3}$$

如果两个或者两个以上分数具有相同分母，它们的加或者减只通过加或减分子来进行.

$$\frac{7}{11}-\frac{5}{11}=\frac{2}{11}$$

$$\frac{9}{5}+\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$$

但是，如果分数的分母不同，就必须通过通分找出公共的分母.

$$\frac{3}{5}+2\frac{2}{3}=\frac{3}{5}+\frac{8}{3}=\frac{9+40}{15}=\frac{49}{15}=3\frac{4}{15}$$

$$\frac{5}{4}-\frac{1}{3}=\frac{15-4}{12}=\frac{11}{12}$$

分数相乘，分子和分母分别相乘：

$$\frac{2}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{35}$$

分数相除可转变为乘法进行处理，被除数(首个分数)乘以除数(第二个分数)的倒数.

$$\frac{5}{8}\div\frac{2}{3}=\frac{5}{8}\times\frac{3}{2}=\frac{15}{16}$$

如果分数的分母相同，只把分子相除，分母相互抵消.

$$\frac{6}{7}\div\frac{4}{7}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

1.3 小数

小数是分数的分子除以分母所得的商. 因此，它是分数使用小数点的表达形式. 小数点右侧数字的个数，称为小数位数.

$$\frac{5}{21}=5\div 21=0.2381$$

在上例中，小数点右侧有许多数字，但四舍五入到四个小数位. 我们也可以把一个小数转变为一个普通分数：

$$0.125=\frac{125}{1000}$$

而且，可以将分子、分母同除以 125 化简：

$$\frac{125\div 125}{1000\div 125}=\frac{1}{8}$$

另一个例子：

$$3.4=3\frac{4}{10}=3\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$$

把利率表示成小数形式是学生最容易出现常见错误的地方.

例 1.3.1 年利率 $8\frac{1}{4}\%$的月利率是多少?

$$8\frac{1}{4}\%=0.0825$$

$$0.0825\div 12=0.006\,875$$

例 1.3.2 年利率 $7\frac{1}{3}\%$的周利率是多少?

$$7\frac{1}{3}\%=0.0733$$

$$0.0733\div 52=0.001\,41$$

1.4 循环数

循环数是无限小数，它的小数点后某个数字是无限重复的. 例如，分数$\frac{2}{3}$是一个循环数，因为用 3 除 2 结果是 0.6…，6 的小数位无穷无尽.

$$\frac{2}{3}=0.666\,666\cdots$$

1.5 百分数

百分数是分母为 100 的分数. 因此，所有的百分数表示所有可能的百分比，包括超出第 100 份的百分比，比如 250%. 百分数用具有两个小数位的小数来表示，如 0.86，或者用百分号来表示，如 86%.

$$34\%=\frac{34}{100}=0.34$$

$$9\frac{1}{4}\%=\frac{9\frac{1}{4}}{100}=\frac{\frac{37}{4}}{100}=\frac{37}{4}\times\frac{1}{100}=\frac{37}{400}=0.0925$$

在金融领域，可以把利率从通常的分数转变为小数，或者转变为百分数，这是至关重要的.

在对小数进行加和减的时候，数字应该按列垂直排布，还应该把小数点对齐.

$$\begin{array}{r} 0.015 \\ +0.001\,67 \\ \hline 0.016\,67 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9.398 \\ -2.1 \\ \hline 7.298 \end{array}$$

在小数相乘的时候，先不计小数点，把数字相乘，然后把乘积数字的小数位整合起来，应用到最终答案.

$$0.52\times0.0039\times0.117\Rightarrow52\times39\times117=237\,276\Rightarrow0.000\,237\,276$$

因为我们有九个整合的小数位，最终答案应该在数字乘积左边加三个小数位；也就是说，小数点右侧有九个小数位.

在小数相除的时候，我们按照下面的步骤：

1. 把除数的小数点向右移动到末尾数.
2. 把被除数的小数点向右移动和除数相同的小数位.
3. 把商的小数点放在和被除数相同的位置.
4. 对改变后的数进行相除.

14.976÷2.4

2.4(除数)将变为 24

14.976(被除数)将变为 149.76

$$\begin{array}{r} 6.24 \\ 24\overline{)149.76} \\ \underline{144} \\ 57 \\ \underline{48} \\ 96 \\ \underline{96} \\ 0 \end{array}$$

1.6 基、百分率和百分量

百分数的使用是金融中最普遍的应用之一．为了更好地理解百分数，我们注意三个变量．

- 基(B)，它是总量．
- 百分量(P)，它是对总量应用百分率得到的部分量．
- 相对于基的百分率(R)，

$$P = B \cdot R$$

例 1.6.1 如果一个人为他 12 850 美元的额外收入支付 28％的税率，他将纳税 3598 美元．

B=12 850，R=0.28，P 是纳税额，即

$$P = 12\ 850 \times (0.28) = 3598$$

我们也能变换公式求得 B 和 R：

$$B = \frac{P}{R}$$

例 1.6.2 如果某人在一家饭店支付了 12 美元作为 15％的小费，这顿晚餐花了多少钱？

饭店的账单是 B，小费是 P，比率 R 是 15％．

$$B = \frac{P}{R} = \frac{\$12}{0.15} = \$80$$

百分率(R)也能如下得到：

$$R = \frac{P}{B}$$

例 1.6.3 如果一个人存款 3580 美元，已经获得 196.90 美元的利息，则存款利率是多少？

$$R = \frac{P}{B} = \frac{196.90}{3580} = 0.055 = 5.5\%$$

1.7 比率

比率是在两个值之间相对比较的一种形式．从数学角度讲，比率表示了两个数的商，上面的数称为第一项，下面的数称为第二项．例如，如果房间长是 36 英尺[㊀]，宽是 12 英尺，长相对宽的比率是$\frac{36}{12}=\frac{3}{1}$(或者 3∶1)，表示房间长是宽的三倍这个事实，由此建立了在二维之间的相对比较．这种关系也能逆向表示，表明宽相对于长的程度如何，即$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$．我们可以说房间的宽是长的三分之一．比率在金融中应用广泛，特别是在财务比率、投资、贴现、利息、税收和保险费等方面．A 对 B 的比率是 A/B，或者A∶B，比率只用 A 表示是

㊀ 1 英尺＝0.3048 米。

可行的，这就意味着 B 的值只能是 1，就像上述房间测量的例子一样. 当长度比率是 3，而宽度比率是 1 时，我们知道长对宽的关系是 3 倍，或者 3∶1. 比率被表示为两个以上变量两两之间的序列也是可行的，例如 $A:B:C:D$，表示 A 相对于 B、B 相对于 C、C 相对于 D 的有顺序的比率.

例 1.7.1 一座建筑有如下的测量结果：

长度(L)：600 英尺
宽度(W)：200 英尺
高度(H)：100 英尺
周长(P)：1600 英尺

那么，可以得到 $L:W:H:P$ 的有顺序的比率为 $3:2:\frac{1}{16}$，或者 $3:2:0.0625$.

$$\frac{L}{W}=\frac{600}{200}=3$$
$$\frac{W}{H}=\frac{200}{100}=2$$
$$\frac{H}{P}=\frac{100}{1600}=\frac{1}{16}=0.0625$$

1.8 比例

比例定义了两个比率之间的等式，例如 $A:B=C:D$，读作“A 比 B 和 C 比 D 相等”. 两个外项 A 和 D 称为**极值**，而两个内项 B 和 C 称为**均值**. 把比例记作比率的等式，将导出另一个等式，它用项的交叉相乘的方式得到，极值的乘积等于均值的乘积.

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \quad 和 \quad AD=BC$$

另外，还将导出第一个极值与第二个均值的比率 A/C，等于第一个均值与第二个极值的比率B/D.

$$\frac{A}{C}=\frac{B}{D}$$

例 1.8.1

$$\frac{3}{7}=\frac{0.75}{1.75}\equiv\frac{3}{0.75}=\frac{7}{1.75}$$

并且，

$$3\times(1.75)=7\times(0.75)$$
$$5.25=5.25$$

1.9 整除数

整除数就是用这种除数去除被除数，只留下整数商而没有余数. 例如，如果我们用 2 或 5 或 10 除 100，依次得到 50、20 和 10. 如果我们再用 $11\frac{1}{9}$或 $6\frac{1}{4}$除 100，将依次得到

9 和 16. 因此，像 2、5、10、$11\frac{1}{9}$和 $6\frac{1}{4}$这样的数都是 100 的整除数. 整除数在金融领域有特殊的实践性，表 1-1 给出了 100 常见的整除数，用它们去除 100 所得的商都是不带余数的整数. 附录中的表 1 给出了更多的整除数.

表 1-1

商$\left(Q=\frac{100}{A}\right)$	整除数 A(除数)	商$\left(Q=\frac{100}{A}\right)$	整除数 A(除数)
2	50	12	$8\frac{1}{3}$
3	$33\frac{1}{3}$	13	$7\frac{9}{13}$
4	25	14	$7\frac{1}{7}$
5	20	15	$6\frac{2}{3}$
6	$16\frac{2}{3}$	16	$6\frac{1}{4}$
7	$14\frac{2}{7}$	20	5
8	$12\frac{1}{2}$	25	4
9	$11\frac{1}{9}$	30	$3\frac{1}{3}$
10	10	40	$2\frac{1}{2}$
11	$9\frac{1}{11}$	50	2

1.10 指数

在金融和经济领域，指数和对数函数应用十分广泛，尤其是在复利、投资以及资产折旧和增值等方面，另外它们在经济增长的诸多问题上也大有用武之地. **指数**用来表示某个底数的幂，指底数被它自身相乘的次数. 例如，在 X^3 中，3 就是底数 X 的指数，意思是 X 被自乘 3 次：$X \cdot X \cdot X = X^3$. 同样，2^4 意味着底数 2 被乘四次，这时指数是 4.

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

金融中指数的常用形式是

$$(1+r)^n = (1+r)(1+r)\cdots(1+r) \text{ 乘 } n \text{ 次}$$

和

$$(1-d)^k = (1-d)(1-d)\cdots(1-d) \text{ 乘 } k \text{ 次}$$

1.11 指数律

假设底数为 X，a、b 是指数，其中 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$，我们能够总结出如下的**指数律**：

$X^a \cdot X^b = X^{a+b}$	例如：$3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 243$
$\frac{X^a}{X^b} = X^{a-b}$	例如：$\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2 = 9$
$(X^a)^b = X^{ab}$	例如：$(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729$
$(XY)^a = X^a Y^a$	例如：$(2 \times 3)^2 = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$
$\left(\frac{X}{Y}\right)^a = \frac{X^a}{Y^a}$	例如：$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$
$\frac{1}{X^a} = X^{-a}$	例如：$\frac{1}{3^2} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$
$\sqrt[a]{X} = X^{1/a}$	例如：$\sqrt[2]{9} = 9^{1/2} = 3$
$\sqrt[a]{X^b} = X^{b/a}$	例如：$\sqrt[2]{9^4} = 9^{4/2} = 9^2 = 81$
$X^0 = 1(X \neq 0)$	例如：$3^0 = 1$

1.12　指数函数

在**指数函数**中，常数 a 具有可变指数(x)，其中常数大于零但不等于 1. 指数函数通常描述一种常数增长率，它采用等式的形式描述了一个因变量(例如 Y)如何随另一个自变量(比如 x)的某种变化而增长. 即

$$y = a^x, \quad 其中 \quad a > 0 \quad 且 \quad a \neq 1$$

表 1-2 和图 1-2 给出了 x 轴每个半轴上三个 x 的假设值下两个指数函数的取值情况.

$$y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$y = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$$

$$y = 4^x$$

$$y = 4^{-x}$$

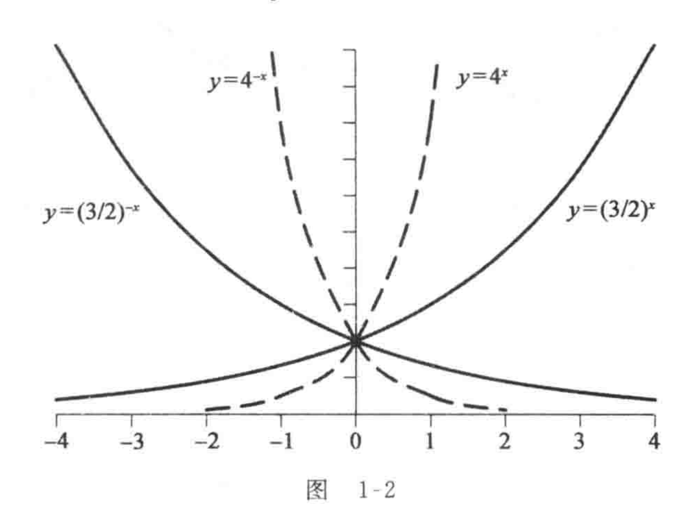


图 1-2

表　1-2

x	y 值：$y=\left(\frac{3}{2}\right)^{x}$	y 值：$y=\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$
1	$\left(\frac{3}{2}\right)^{1}=\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{3}$
2	$\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{9}{4}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=\frac{4}{9}$
3	$\left(\frac{3}{2}\right)^{3}=\frac{27}{8}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=\frac{8}{27}$
−1	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{3}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-(-1)}=\frac{3}{2}$
−2	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=\frac{4}{9}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-(-2)}=\frac{9}{4}$
−3	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=\frac{8}{27}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-(-3)}=\frac{27}{8}$
x	y 值：$y=4^{x}$	y 值：$y=4^{-x}$
1	$4^{1}=4$	$4^{-1}=\frac{1}{4}$
2	$4^{2}=16$	$4^{-2}=\frac{1}{16}$
3	$4^{3}=64$	$4^{-3}=\frac{1}{64}$
−1	$4^{-1}=\frac{1}{4}$	$4^{-(-1)}=4$
−2	$4^{-2}=\frac{1}{16}$	$4^{-(-2)}=16$
−3	$4^{-3}=\frac{1}{64}$	$4^{-(-3)}=64$

1.13　自然指数函数

自然指数函数是一个底数(a)等于自然底数(e)的函数.

$$y=a^{x}\rightarrow y=\mathrm{e}^{x}$$

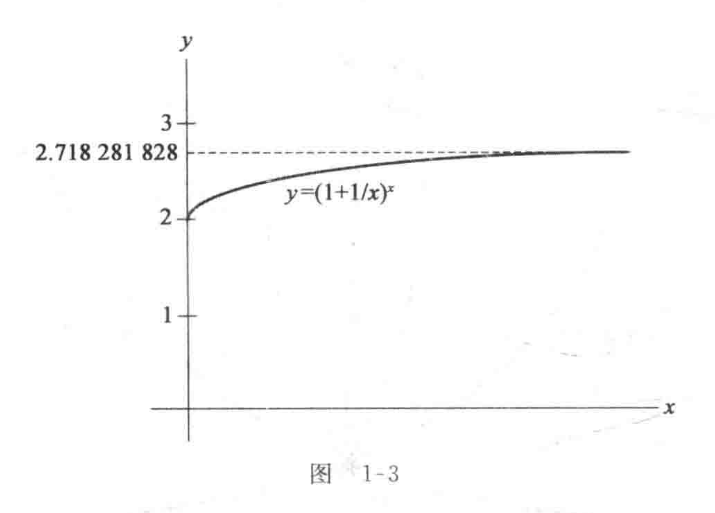


图　1-3

其中,

$$\mathrm{e}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=2.718\ 281\ 828$$

(参见图 1-3). 这种函数描述了以常数速率的连续增长(例如人口增长), 以及资产负速率增长, 也称为资产减值.

1.14 自然指数律

下面是自然指数律.

$$e^0=1$$
$$e^1=e=2.718\ 281\ 828$$
$$e^a \cdot e^b=e^{a+b}$$
$$(e^a)^b=e^{ab}$$
$$\frac{e^a}{e^b}=e^{a-b}$$

1.15 科学计数

可以用科学计数法方便地记数. 科学计数的一般形式是

$$a(10)^x$$

这里 a 是一个 1～10 之间的数, x 是一个整数. 把一个数记作科学计数的步骤概括如下:

1. 即使没有小数点, 也假设存在一个小数点.
2. 从左起向右移动小数点到给定数的首个非零数字.
3. 给 x(10 的幂)一个值, 恰好等于小数点移动的位数.
4. 如果小数点向左移动, 给 x 一个正号; 如果小数点向右移动, 给 x 一个负号.

例 1.15.1 用科学计数法记 425.

$$425 = 425.0$$

把小数点移到 4 的右侧, 即向左移动两位. 2 成为 10 的幂, 是正的幂:

$$425 = 425.0 = 4.25(10)^2$$

例 1.15.2 用科学计数法记 0.000 359.

因为 3 是首个非零数字, 我们移动小数点到 3 的右侧, 即向右移动四位, 4 将变成 10 的幂, 因为小数点向右移, 是负的幂.

$$0.000\ 359 = 3.59(10)^{-4}$$

1.16 对数

对数是指数的一种逆运算, 一般有常用对数和自然对数. **常用对数**就是以 10 为底数、幂值等于某个数的对数. 例如, 某数是 15, 那么为了得到 15, 就得把 10 的幂升到 1.176, 记作$\log_{10}15=1.176$, 并且读作"15 的常用对数是 1.176".

$$(10)^{1.176} = 15$$

自然对数就是底数为 e、幂值等于某个数的对数. 例如, 如果某数是 50, 那么以 e(取 e=2.718 28)为底数, 3.912 的幂值为 50.

$$(2.718\ 28)^{3.912} \equiv \log_e 50 = \ln 50 = 3.912$$

读作“50 的自然对数是 3.912”.

1.17　对数律

下面是最常用的对数律：

$$\log X+\log Y=\log XY$$

$$\log X-\log Y=\log \frac{X}{Y}$$

$$\log X^a=a\log X$$

$$\log \sqrt[a]{X}=\log X^{1/a}=\frac{1}{a}\log X=\frac{\log X}{a}$$

$$\log 1=0$$

$$\log 10=1$$

1.18　特征、尾数和反对数

因为 $100=10^2$，$1000=10^3$，很明显 log100 为 2，log1000 为 3. 这个事实导出了结论：在 100 和 1000 之间的任意数，其对数都应该等于 2 和 3 之间的某个数. 换句话说，该对数将是 2＋一个分数(或小数). 例如，log346＝2.5391，log973＝2.9881. 为了找到像这样 10 的幂不是精确数的任意数的对数，我们可以用下面的办法：

1. 用科学计数法表示这些数，其中

$$N=a\cdot 10^x \qquad 1<a<10$$

科学计数法使得把数分为两个相互乘积的部分成为可能，第一部分用 a 表示，第二部分用 10^x 表示.

2. 使用常用对数表(参见附录表 2)得到每部分的对数，然后将两部分对数相加. a 的对数被称为尾数，10 的幂 x 被称为特征.

例 1.18.1　求 log346.

1.

$$346=3.46(10)^2$$

$$\log 346=\log 3.46+\log 10^2=\log 3.46+2\log 10$$

$$=\log 3.46+2\ (\text{因为}\ \log 10=1)$$

2. log3.46 是尾数，2 是特征. 为了求出 log3.46，我们在尾数表查阅(参见附录表 2)，忽略 3.46 中的小数点，把其当 34 和 6 看待. 在表中，我们可以看到 34 行和 6 列读出尾数是 5391，因为所有的尾数都被假设为小数点之后，我们把尾数读作 0.5391.

$$\log 346=\log 3.46+2=0.5391+2=2.5391$$

例 1.18.2　求 0.009 35 的对数.

1.

$$0.009\ 35=9.35(10)^{-3}$$

$$\log 0.009\ 35=\log 9.35+(-3)$$

2. 在尾数表中查第 93 行第 5 列，显示出尾数是 0.9708.

$$\log 0.009\,35 = \log 9.35 + (-3) = 0.9708 - 3 = -2.0292$$

反对数就是对数的逆. 在例 1.18.2 中，我们发现 log0.009 35 为 −2.0292，因此，−2.0292 的反对数将是 0.009 35. 为了使用表求反对数，把求对数的过程倒过来即可.

例 1.18.3　求 2.6170 的反对数.

从上面描述的方法我们能得出结论，2.6170 表示特征是 2，尾数是 0.6170，在表中查尾数，追踪这个尾数向左到 41、向上到 4，就得到反对数为 414 的结论. 为了验证，我们建立该数的反方向过程，去看看对数是否正确.

$$\log 414 = 2.6170$$

1.19　对数函数

对数函数就是形如 $y=\log_a x$ 的函数. 在对数项中，该表达式意味着因变量 y 的值恰好是 a 的幂值等于自变量 x 的值的那个幂. 这三个变量取下面的值：

$$a > 0 \quad 但 \quad a \neq 1$$

$$x > 0$$

$$-\infty < y < \infty$$

对数函数也被定义为指数函数的反函数，使得

$$y = \log_a x \text{ 可以写为：}$$

$$x = a^y$$

尽管底(或基)a 可以是任意不为 1 的正数，最常用的值是 a=10，这就定义了常用对数函数；$a=e$(e=2.718 28)则定义了自然对数函数(也称纳皮尔对数函数). 图 1-4 和表 1-3 显示了两个对数函数的例子.

$$\log_5 x = y \quad 或 \quad x = 5^y$$

和

$$\log_{1/5} x = y \quad 或 \quad x = \left(\frac{1}{5}\right)^y$$

表 1-3

y	$x=5^y$	$x=(1/5)^y$
1	5	$\frac{1}{5}$
2	25	$\frac{1}{25}$
0	1	1
−1	$\frac{1}{5}$	5
−2	$\frac{1}{25}$	25

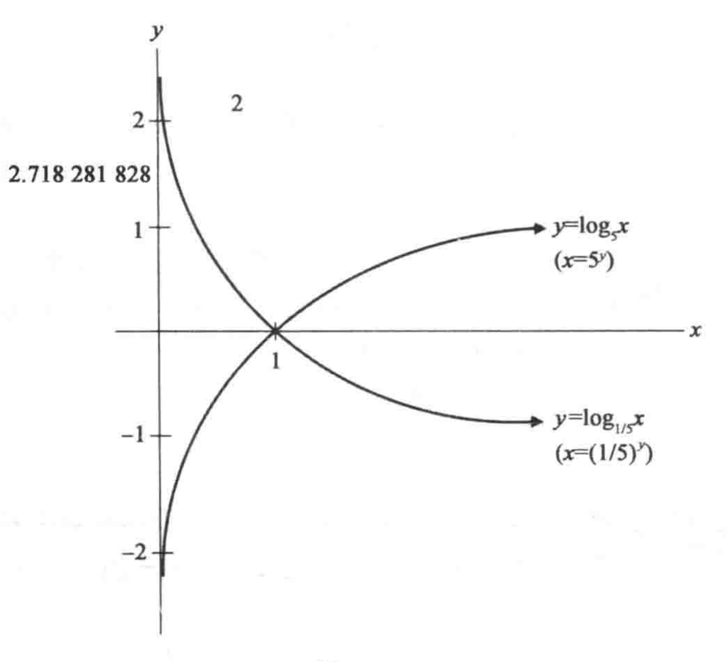


图　1-4

第2章　数　　列

2.1　等差数列

等差数列就是每项都超过前项一个固定的差的数列，这个差值称为**公差**．例如，5，7，9，…就是一个公差为 2 的等差数列．假设一个等差数列起始项是 a_1，数列的公差为 d，那么数列将被记作：

$$a_1, a_1+d, a_1+d+d, a_1+d+d+d, \cdots, a_n-d, a_n$$

$$a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d, \cdots, a_n-3d, a_n-2d, a_n-d, a_n \tag{1}$$

如果第三项是 a_1+2d，第四项是 a_1+3d，那么第 n 项应该是

$$\boxed{a_n = a_1+(n-1)d}$$

其中，a_1 是第一项，n 是总项数，d 是公差．如果将上述数列(1)反过来，得到

$$a_n, a_n-d, a_n-2d, a_n-3d, \cdots, a_1+3d, a_1+2d, a_1+d, a_1 \tag{2}$$

在(1)和(2)中，数列的前 n 项和分别是

$$S_n = a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+(a_1+3d)+\cdots+(a_n-3d) + (a_n-2d)+(a_n-d)+a_n \tag{3}$$

$$S_n = a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+(a_n-3d)+\cdots+(a_1+3d) + (a_1+2d)+(a_1+d)+a_1 \tag{4}$$

把(3)式加到(4)式，我们得到

$$2S_n = (a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_n+a_1)+(a_n+a_1)$$

$$2S_n = n(a_1+a_n)$$

所以，前 n 项和 S_n 的值是

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)}$$

这是数列的一般求和公式．

例 2.1.1　求从 17、12、7 开始的 15 项等差数列的最后一项和第 12 项是多少？

$$a_1 = 17 \quad d = -5$$

$$a_n = a_1+(n-1)d$$

$$a_{15} = 17+(15-1)(-5) = -53 \quad \text{最后一项}$$

第 12 项将是 $a_1+11d=17+11\times(-5)=-38$，整个数列将是

第 1 项	第 2 项	第 3 项	第 4 项	第 5 项	第 6 项	第 7 项	第 8 项	第 9 项	第 10 项	第 11 项	第 12 项	第 13 项	第 14 项	第 15 项
17	12	7	2	−3	−8	−13	−18	−23	−28	−33	−38	−43	−48	−53

例 2.1.2　在一个以 5 开始、以 32 终止的 10 项等差数列中，公差是多少？

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + (n-1)d \\
32 &= 5 + (10-1)d \\
32 &= 5 + 9d \\
27 &= 9d \\
3 &= d
\end{aligned}
$$

整个数列将是

第1项	第2项	第3项	第4项	第5项	第6项	第7项	第8项	第9项	第10项
5	8	11	14	17	20	23	26	29	32

例 2.1.3　等差数列 23，30，37，…，72 的项数是多少？

$$
\begin{aligned}
a_1 = 23 \quad a_n &= 72 \quad d = 7 \\
a_n &= a_1 + (n-1)d \\
72 &= 23 + (n-1)7 \\
72 - 23 &= 7n - 7 \\
72 - 23 + 7 &= 7n \\
\frac{56}{7} &= n \\
8 &= n
\end{aligned}
$$

整个数列将是

第1项	第2项	第3项	第4项	第5项	第6项	第7项	第8项
23	30	37	44	51	58	65	72

例 2.1.4　一笔 3000 美元的借款，附带 9%的利率，每月付清 150 美元，逐月余额和逐月利息形成了两个等差数列，求支付的总利息.

因为本金将以固定每月 150 美元逐渐递减，所以本金数列将是

$$3000,\ 2850,\ 2700,\ \cdots,\ 150$$

因为月利率＝0.09/12＝0.0075，余额的每一项都受到月利息的影响：

$$
\begin{aligned}
3000 \times 0.0075 &= 22.50 \\
2850 \times 0.0075 &= 21.37 \\
2700 \times 0.0075 &= 20.25
\end{aligned}
$$

因此，利息数列是

$$22.50,\ 21.37,\ 20.25,\ \cdots,\ 1.125$$

支付的次数

$$n = \frac{3000}{150} = 20$$

支付的总利息是所有利息的和 S_n

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{20}{2}(22.50 + 1.12) = 236.20$$

例 2.1.5　在例 2.1.4 中，第一年年终的本金是多少？第 17 个月偿还的利息是多少？

第 12 个月的本金是

$$a_{12} = a_1 - 11d = 3000 - 11(150) = 1350$$

第 17 个月偿还的本金是

$$a_{17} = a_1 - 16d = 3000 - 16(150) = 600$$

第 17 个月偿还的利息是

$$600 \times 0.0075 = 4.50$$

或者

$$a_{17} = a_1 - 16d = 22.50 - 16(1.125) = 4.50$$

2.2　等比数列

在**等比数列**中，每一项都能用前项乘以一个被称为**公比**的常数而得到．公比能用每一项除以其前项来得到．例如，2，4，8，16，…是一个公比为 2 的等比数列，因为

$$\frac{16}{8} = 2,\quad \frac{8}{4} = 2,\quad \frac{4}{2} = 2$$

和

$$16 = 8 \times 2,\quad 8 = 4 \times 2,\quad 4 = 2 \times 2$$

假设等比数列由项 a_1 开始，公比为 r，因此，数列将被记作：

$$a_1, a_1 r, a_1 \cdot r \cdot r, a_1 \cdot r \cdot r \cdot r, \cdots, a_1 \cdot r^{n-2}, a_1 \cdot r^{n-1}, a_1 r^n$$

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, \cdots, a_1 r^{n-2}, a_1 r^{n-1}, a_1 r^n$$

第 n 项必定是

$$\boxed{a_n = a_1 r^{n-1}}$$

其中，a_1 是首项，r 是公比，n 是总项数，数列的前 n 项和 S_n 则是

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} \tag{1}$$

用 r 乘等式两边，得

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \cdots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \tag{2}$$

(1)式减去(2)式，得

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n$$

$$S_n(1 - r) = a_1(1 - r^n)$$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}}$$

例 2.2.1　求等比数列 9，−3，1，…的第 6 项．

公比 r 是

$$\frac{-3}{9} = -\frac{1}{3} \quad 或 \quad \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

第 6 项 a_6 是

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_6 = 9\left(-\frac{1}{3}\right)^{6-1} = -\frac{1}{27}$$

整个数列是

第 1 项	第 2 项	第 3 项	第 4 项	第 5 项	第 6 项
9	-3	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$1\frac{1}{27}$

例 2.2.2 (a) 求首项为 4，公比为$\frac{5}{16}$，包含 5 项的等比数列的和.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$$

$$S_5 = \frac{4\left[1-\left(\frac{5}{16}\right)^5\right]}{1-\frac{5}{16}}$$

$$S_{10} = 5.80$$

(b) 写出数列所有的 5 项.

整个数列是

第 1 项	第 2 项	第 3 项	第 4 项	第 5 项
4	$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{64}$	$\frac{125}{1024}$	$\frac{625}{16\ 384}$

例 2.2.3 (a) 在首项为 4，公比为 2，和为 252 的等比数列中，有多少项？

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$

$$252 = 4 \cdot \frac{1-2^n}{1-2}$$

$$64 = 2^n$$

$$\log 64 = n \log 2$$

$$\frac{\log 64}{\log 2} = n$$

$$\frac{1.806\ 179\ 974}{0.301\ 029\ 995\ 7} = n$$

$$6 = n$$

(b) 写出数列所有的项.

整个数列是

第 1 项	第 2 项	第 3 项	第 4 项	第 5 项	第 6 项
4	8	16	32	64	128

例 2.2.4　一台打印机是 15 000 美元购买的，年折旧率是 20%，第 10 年末它的价值将是多少？

这是一个等比数列的问题，首项(a_1)是购买价 15 000 美元(参见图 E2-2-4)．因为折旧率是 20%，机器在任意一年的价值将是前一年价值的 80%．因此，公比 r 是 80%，因为我们要计算初始值之后的 10 个值，n 将是 11.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_{11} = 15\ 000(0.80)^{11-1} = 1610.61$$

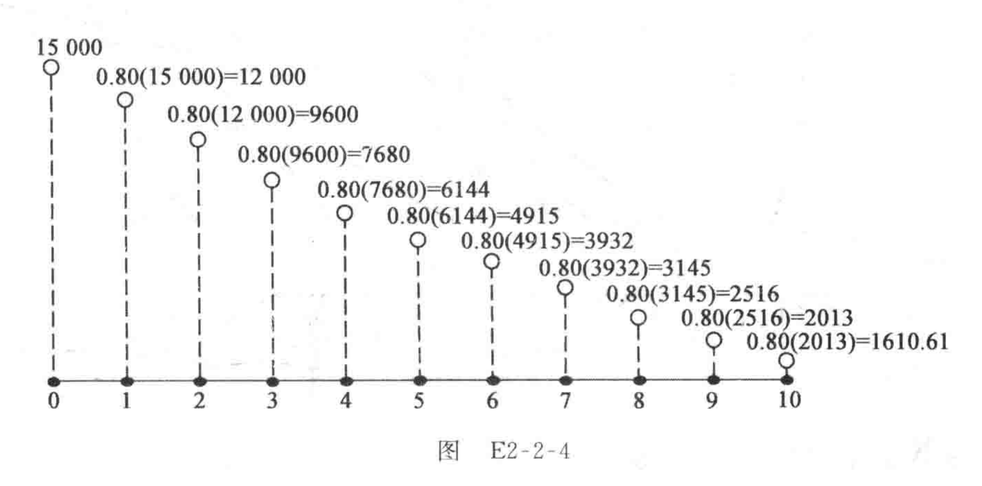


图　E2-2-4

整个数列是

第 1 项	第 2 项	第 3 项	第 4 项	第 5 项	第 6 项	第 7 项	第 8 项	第 9 项	第 10 项	第 11 项
15 000	12 000	9600	7680	6144	4915	3932	3145	2516	2013	1610.61

2.3　递推数列

在**递推数列**中，每一项都是前面两项的和，而不是由公差或公比所决定的．例如，把第 2 项加到第 1 项得到第 3 项，把第 3 项加到第 2 项得到第 4 项，等等．在这种情形下，递推数列要求最少知道第 1 和第 2 项．递推数列的第 n 项记作

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}$$

例 2.3.1　完成下面的递推数列到第 7 项：5，7，…

第 3 项 $= 5 + 7 = 12$

第 4 项 $= 12 + 7 = 19$

第 5 项 $= 19 + 12 = 31$

第 6 项 $= 31 + 19 = 50$

$$第\ 7\ 项 = 50 + 31 = 81$$

所以，整个数列是

第 1 项	第 2 项	第 3 项	第 4 项	第 5 项	第 6 项	第 7 项
5	7	12	19	31	50	81

例 2.3.2 递推数列的前两项为 $a_1=2$ 和 $a_2=6$，其第 10 项是多少？

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_3 = a_{3-1} + a_{3-2} = a_2 + a_1 = 6 + 2 = 8 \tag{1}$$

$$a_4 = a_{4-1} + a_{4-2} = a_3 + a_2 = 8 + 6 = 14 \tag{2}$$

$$a_5 = a_{5-1} + a_{5-2} = a_4 + a_3 = 14 + 8 = 22 \tag{3}$$

$$a_6 = a_{6-1} + a_{6-2} = a_5 + a_4 = 22 + 14 = 36 \tag{4}$$

$$a_7 = a_{7-1} + a_{7-2} = a_6 + a_5 = 36 + 22 = 58 \tag{5}$$

$$a_8 = a_{8-1} + a_{8-2} = a_7 + a_6 = 58 + 36 = 94 \tag{6}$$

$$a_9 = a_{9-1} + a_{9-2} = a_8 + a_7 = 94 + 58 = 152 \tag{7}$$

$$a_{10} = a_{10-1} + a_{10-2} = a_9 + a_8 = 152 + 94 = 246 \tag{8}$$

整个数列是

第 1 项	第 2 项	第 3 项	第 4 项	第 5 项	第 6 项	第 7 项	第 8 项	第 9 项	第 10 项
2	6	8	14	22	36	58	94	152	246

2.4 无穷等比数列

考虑等比数列的前 n 项和 S_n

$$S_n = a_1\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a_1}{1-r} - \frac{a_1 r^n}{1-r}$$

当公比(r)取值介于-1和1之间($-1<r<1$)时，我们能得出结论，当 n 无限递增时，项 r^n 将逼近于0，S_n 将趋向于 $a_1/(1-r)$. 因此，前 n 项和将变成**无穷等比数列**的和，表示为

$$S_n = \frac{a_1}{1-r} \quad 其中 \quad -1 < r < 1$$

例 2.4.1 求无穷等比数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$的和.

$$S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

这意味着，当数列的项数增加到无穷时，无穷多项的和恰好是 2. 我们把这个事实表示为

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2$$

2.5 增长和衰减曲线

增长和衰减曲线是形如

$$\boxed{Y = ab^x}$$

的指数函数的图形表示，其中 a 是正数($a>0$)．曲线是增长曲线还是衰减曲线，取决于 b 的取值．

- 对增长曲线，b 的取值必定大于 1($b>1$)．
- 对衰减曲线，b 的取值必定大于 0 但小于 1($0<b<1$)．

在追踪和预测经济趋势或者生物生长时，增长曲线是很有帮助的，例如细菌的生长曲线，或一种传染病的扩散．衰减曲线用于建模，例如，经济衰退或婴儿死亡率．

例 2.5.1 假设海洋中的原油溢出用指数函数 $Y=2(5)^X$ 估计，这里 $X=0$ 代表水下管道破裂的那天，负 X 表示管道破裂前那些天，正 X 表示之后的那些天，事故发生后(参见图 E2-5-1)，溢油的量将根据 $Y=2(5)^X$ 增长．

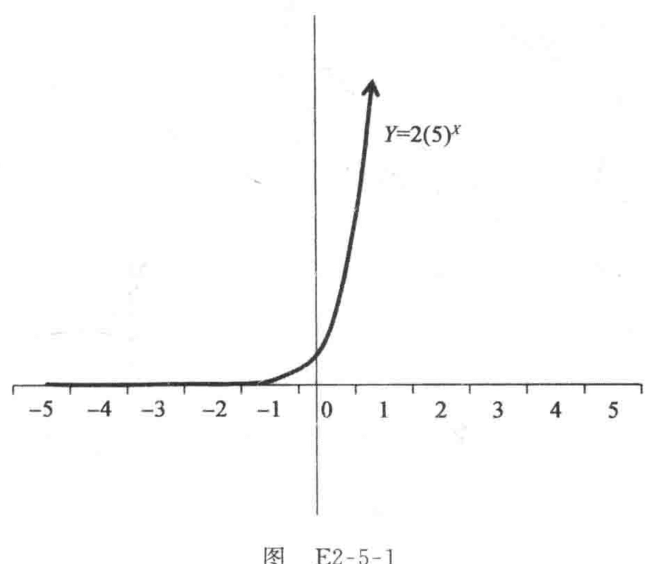


图 E2-5-1

我们尝试着在表 E2-5-1 中得到 X 和 Y 的值，它们分别代表天数和用百桶度量的溢油量．所以溢油将沿指数曲线增长，从事故第一天的 200 桶到事故之后第 15 天的 625 000 桶．

表 E2-5-1

X(天数)	Y(百桶)
−5	0.0006
−4	0.0032
−3	0.016
−2	0.08
−1	0.4
0	2
1	10
2	50
3	250
4	1250
5	6250

例 2.5.2 如果我们假设在例 2.5.1 中所有修复破损管道的努力都失败，裂口的情况保持相同，没有更加恶化，10 天之内将溢出多少桶原油？

答案就是用 10 替换 X，去求解 Y：

$$Y = 2(5)^X = 2(5)^{10} = 19\,531\,250$$

而且因为用 100 桶为度量单位，总的溢油将是

$$Y = 19\,531\,250 \times 100 = 1\,953\,125\,000$$

例 2.5.3 假设一家配送产品的小企业的年保险费能够用如下函数估计：

$$Y = 750(1.25)^X$$

(参见图 E2-5-3)，这里

$X=0$ 代表 2011 年保险费

$X=1$ 代表 2012 年保险费

$X=-1$ 代表 2010 年的保险费

则 2011 年和 2015 年的保险费将是多少？2008 年的保险费是多少？

2011 年的保险费：

$$Y = 750(1.25)^0 = 750$$

2015 年的保险费：

$$Y = 750(1.25)^4 = 1831.05$$

2008 年的保险费：

$$Y = 750(1.25)^{-3} = 384$$

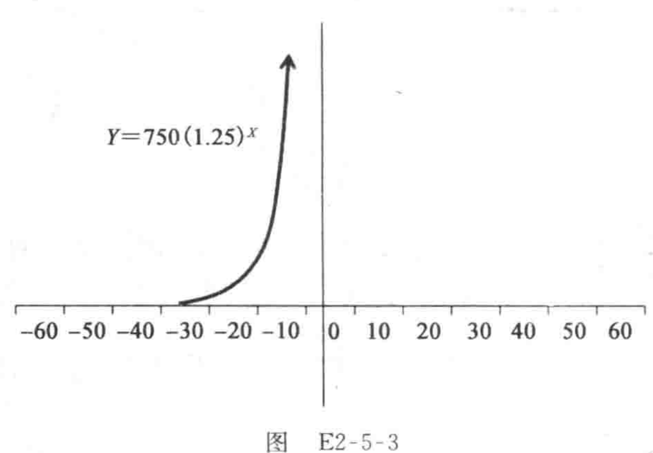


图 E2-5-3

对于指数递减发展的情况进行估计，衰减曲线仍然是重要的. 例如，某国的婴儿死亡率能用如下函数估计：

$$Y = 10^5(0.89)^X$$

其中

$X=0$ 代表任意年

$X=1$ 代表后一年

$X=-1$ 代表前一年

我们可以看图 2-1 显示的曲线，例如，可以计算 2011 年和 2014 年的死亡率，看看 2001 年死亡率是多少.

在 2011 年：

$$Y = 10^5(0.89)^X = 10^5(0.89)^0 = 100\ 000$$

在 2014 年：

$$Y = 10^5(0.89)^3 = 70\ 497$$

在 2001 年：

$$Y = 10^5(0.89)^{-10} = 320\ 700$$

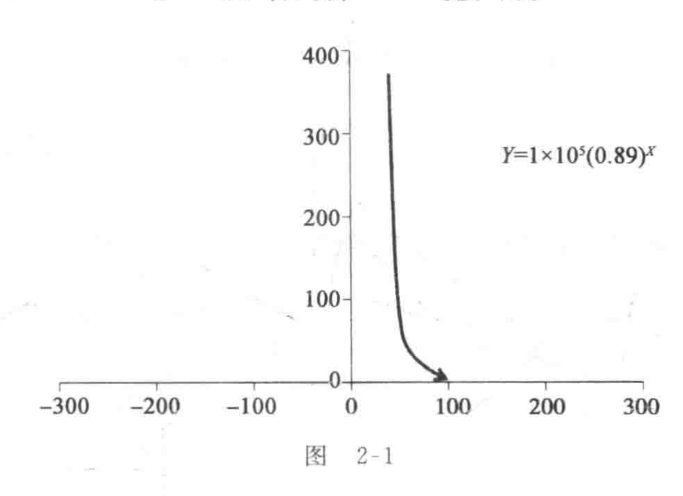


图　2-1

所以，随着时间的推移，死亡率是递减的，这就是一个递减的指数函数表示的含义.

例 2.5.4　假设由于医学进步和健康意识增强，某种传染性流感的季节性感染率可用下面的指数函数表示：

$$Y = 30(0.6)^X$$

(参见图 E2-5-4)，其中

$X=0$ 指医学进步和采用新预防措施前的那个季节

$X=1$ 是迟一年

$X=-1$ 是早一年

当 $X=0$ 的时候，流感的扩散率是多少？给定以 100 例为单位的情形，早五年和迟五年的流感扩散率又是多少？

在流感传染病的起始，

$$Y = 30(0.6)^0 = 30$$

因为每个单位是 100 例，病例的总数是

$$Y = 30 \times 100 = 3000$$

早 5 年，

$$Y = 30(0.6)^{-5} = 386 = 386 \times 100 = 38\ 600$$

迟 5 年，

$$Y = 30(0.6)^5 = 2.33 = 2.33 \times 100 = 233$$

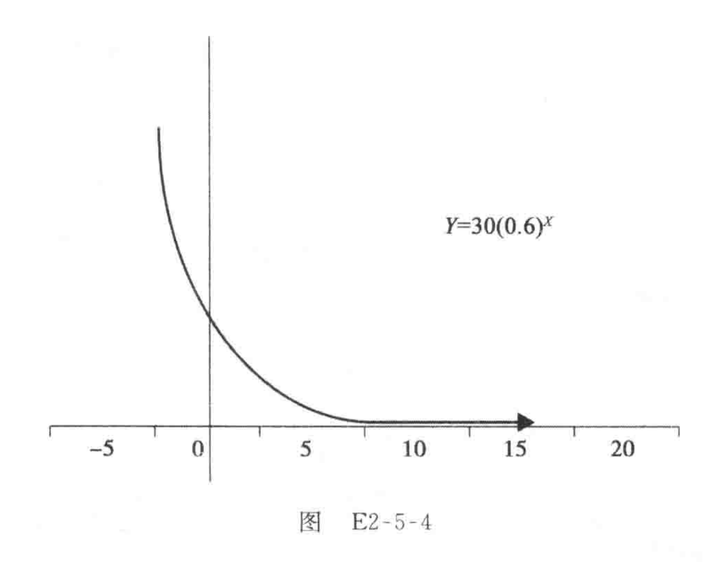


图　E2-5-4

2.6　具有自然对数底的增长和衰减函数

伴随着越来越多的实践，数学家发现自然对数底 e=2.718 28 对增长和衰减这样的指数函数能产生很好的近似．因此，把函数 $Y=ab^x$ 用下式来表示更合适：

$$\boxed{Y = ae^x}$$

和

$$\boxed{Y = ae^{-x}}$$

这里 e^x 或 e^{-x} 可以通过查表或计算得到，附录中表 3 列出了 e^x 和 e^{-x} 从 0 到 9.9 的值．

例 2.6.1　一家工业公司的年收益用如下指数函数表示：

$$Y = 3000 + 7500e^{27x}$$

其中 x 是公司已经销售产品多长时间．所以，如果公司去年把产品引进市场，$x=1$，收益将是

$$Y = 3000 + 7500e^{27(1)} = 12\ 824$$

在第 5 年，收益将是

$$Y = 3000 + 7500e^{27(5)} = 31\ 930$$

第3章 统计度量

3.1 基本组合原则和概念

基本组合数学构成了计数和排序的基础数学原则和概念. 在理解和接受更为高级的概率和数学期望的概念方面，基本组合数学扮演重要角色.

N_i 原则

如果在全部 n 个事件中，事件 i 能以 N_i 种可能方式发生，那么 n 个事件的序列的方式数可写作：

$$N_1, N_2, N_3, \cdots, N_n$$

例 3.1.1 假设一个公司宣称有 6 个管理岗位(P_i)，每个岗位能安置 2 个管理人员. 我们能约定这些职位如下(其中 $n=6$)：

$$P_i = P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$$

因为每个岗位有 2 个管理人员(a 和 b)，我们可以把约定改写如下：

$$P_i^a = P_1^a, P_2^a, P_3^a, P_4^a, P_5^a, P_6^a$$

$$P_i^b = P_1^b, P_2^b, P_3^b, P_4^b, P_5^b, P_6^b$$

n 的阶乘原则

数 $n!$ (n 是正整数)是 n 个目标能被排列的方式数. 在数学上，$n!$ 可用数 n 乘以比 n 小的所有数来计算，这些数依顺序递减，每次递减一个单位 1，直到最终递减到单位 1：

$$\boxed{n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 2 \cdot 1} \qquad \text{给定 } 0! = 1 \tag{1}$$

例 3.1.2 假设你同一天收到 5 封信，而信却是不同的日期发出的，你依设定好的顺序来读它们的机会数，能用 5! 来计算：

$$5! = (5)(5-1)(5-2)(5-3)(5-4) = (5)(4)(3)(2)(1) = 120$$

mn 原则

如果有 m 个和 n 个元素，每个排列如下：

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_m$$

$$B_1, B_2, B_3, \cdots, B_n$$

我们可以构造一个总数 N，它是包含每一组中的一个元素的排列数，等于 mn.

$$N = mn$$

例 3.1.3 假设三个公司来到一所商学院，要从金融、营销、会计和管理四个系中

每个系选择一个毕业生．令公司数为 m，系的个数为 n，被选中的毕业生总数是 N（见图 E3-1-3）：

$$\boxed{N = mn}$$
$$= 3(4)$$
$$= 12$$

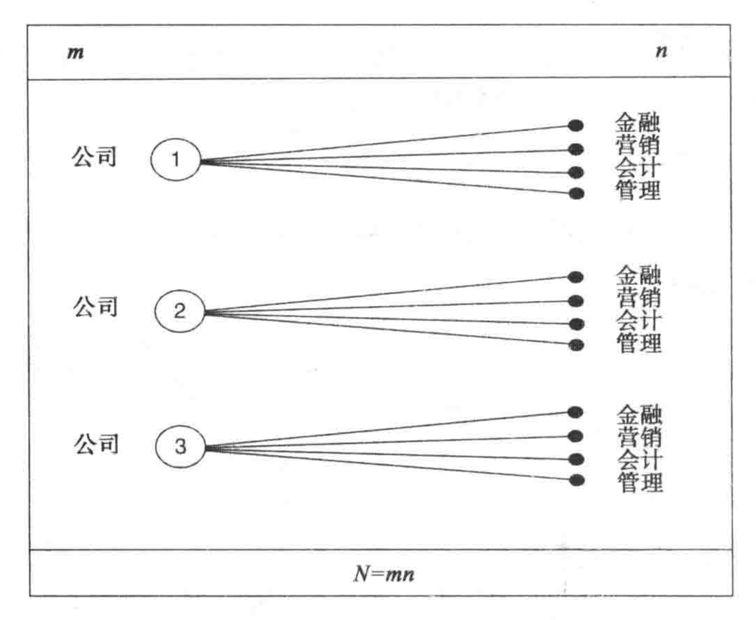


图 E3-1-3

例 3.1.4 让我们假定六列火车在纽约的两个车站之间往返，你去乘坐某列火车，但返回却乘坐另一列火车，这样的方式有多少种？

这是一个 mn 的问题，因为你从车站Ⅰ到车站Ⅱ的火车数是 $m=6$，而你从车站Ⅱ到车站Ⅰ返回的火车数是 $n=5$（去掉你去的时候乘坐的火车）．

$$N=mn=6(5)=30$$

如果你标注火车颜色，红(R)、绿(G)、蓝(B)、白(W)、黄(Y)和橘色(O)，我们就能把方法总数形象地显示在图 E3-1-4 中．

乘坐相同的火车返回有多少种方法数，仍然是一个 mn 的问题．你去时乘坐的火车数是 $m=6$，而你返回乘坐的火车数只能是 $n=1$．因此，

$$N = mn = 6(1) = 6$$

3.2 排列

排列是一种安排和陈列元素的方法．它是从 n 个目标中一次性取出 r 个的排列方法数目．你也可以把排列看做是寻找用 n 个目标去填 r 个空位的方法数目，排列表示为 P_n^r，其中 n 是目标数、r 表示给定次数被安排的方法．

假定有四本彩色封面的书，依次是红色(R)、绿色(G)、蓝色(B)和黄色(Y)，再假定有

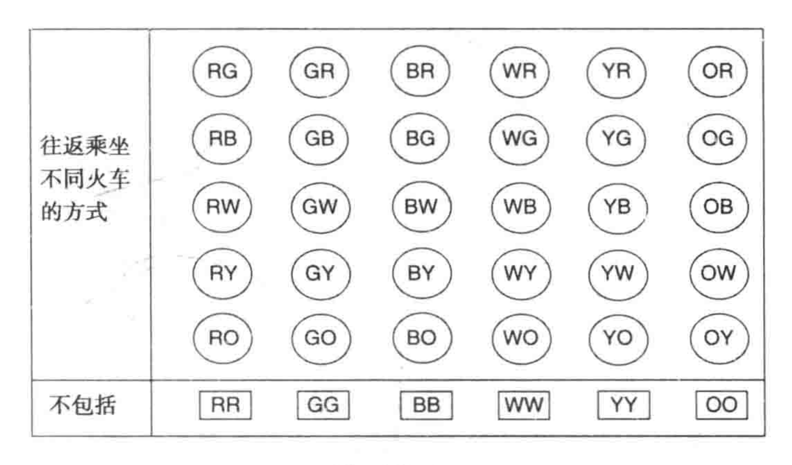


图　E3-1-4

四个标号为 1—4 的书架，这些书一次被放在一个书架上的方法数展示在图 3-1 中. 对第一个书架来说，我们能从所有四本书中选择，选中的是绿色(G)封面的书；对第二个书架来说，我们能从余下的三本书中选择，选中的是蓝色(B)封面的书；对第三个书架来说，只能从剩下仅有的两本书中选择，选中黄色(Y)封面的书；对最后一个书架来说，我们仅有唯一的一本书可选，是红色(R)封面的书. 所以，第二排书架包含的可供选择的数目是递减的，和我们一次做出选择书的情形是一样的. 我们可以把任意的书放在第一个书架上，除去绿色封面的书之外的任意书放置在第二个书架上(而绿色封面的书已经被选中放在了第一个书架上)，剩余书和书架都如此方法依次放置. 从数学上讲，排列这些书的方法将有 $n!$ 种：

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 2\cdot 1$$

$$4! = 4(4-1)(4-2)(4-3) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$$

当 $n=r$ 的时候，排列数 P_n^r 为

$$P_n^r = n!$$

$$P_4^4 = 4! = 24$$

1	2	3	4
R, *G, B, Y → G	R, *B, Y → B	R, *Y → Y	*R → R
R, G, B, Y → 4	R, B, Y → 3	R, Y → 2	R → 1

图　3-1

现在假定我们想一次放两本书到书架上，每个书架其中一本书要放其他书的前面，前后之间封面颜色顺序是不同的，也就是说，红和蓝是一种不同于蓝和红的选择. 在这种情形下，我们将看到的排列显示在图 3-2 中. 这是一个 $r<n$ 的排列 P_n^r，这里 n 表示四本书，r 则是我们选择排列它们的方法，是一次选中两本书. 从数学上讲，当 $n=4$，$r=2$的时候，排列数 P_n^r 为

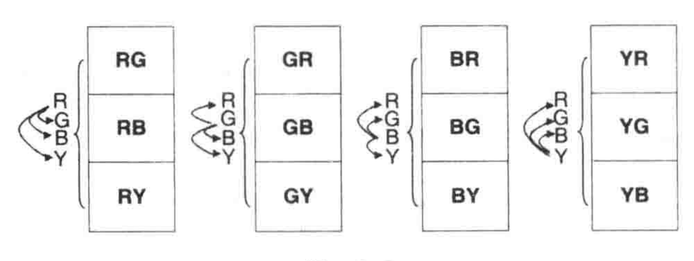


图　3-2

$$\boxed{P_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}$$

$$P_4^2 = 4(4-1)$$

我们在 $4-1$ 停下来，是因为根据上面的公式，它等于最后一项$(n-r+1)$

$$4-1=3=4-2+1$$

因此，P_4^2 为

$$P_4^2 = 4(4-1) = 4\times 3 = 12$$

更一般的排列公式为

$$\boxed{P_n^r = \frac{n}{(n-r)!}}$$

例 3.2.1　如果 12 个竞争者中，有 5 个被随机地选中，一起去赢取一场旅行，确定排列 5 个获胜者将有多少种方法．$n=12$，$r=5$．

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P_{12}^5 = \frac{12!}{(12-5)!} = 95\ 040$$

注意到先前的例子中，n 总是表示所有不同的元素，比如不同的书和不同的人，这是很重要的．当 n 包括相同的元素时，排列数公式是不同的．假设有 9 块彩色砖块，包括 3 种颜色：

3 红色(R)砖块

4 绿色(G)砖块

2 蓝色(B)砖块

在这种情形下，n 是 9，但 r 有三组：$r_1=3$，$r_2=4$，$r_3=2$，因此，排列数能用下式得到：

$$\boxed{P_n^r = \frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_m!}}$$

其中 m 是 r 分组数．因为我们有 r 的三个组，分享着相同的特征(即相同颜色)，$r_1=3$，$r_2=4$，$r_3=2$，所以我们有 $m=3$．

$$P = \frac{9!}{3!\cdot 4!\cdot 2!} = 1260$$

3.3　组合

如同排列一样，**组合**也是安排和陈列元素的一种方式，它涉及 n 个目标和 r 种安排方

式. 唯一的不同就是组合没有考虑 r 被选中的顺序和逆序. 例如，只要三个元素都相同，RGB 和 GRB 以及 BGR 就是相同的，这就意味着组合的方法总数要少于排列的总数，组合数用 C_n^r 表示，得到

$$\boxed{C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}}$$

例 3.3.1 如果我们想从 10 个教授中选择 5 人组建委员会，能组建多少个？

这里 $n=10$，$r=5$，组合数是

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{(10-5)!5!} = 252$$

3.4 概率

概率是不确定性的度量，用来估计一个不确定事件发生的机会或者可能性. 例如，如果我们投掷一枚硬币，或者投掷一枚骰子，我们永远不能确定将得到什么结果，因为任意结果都受到概率的影响. 可是，要是硬币或骰子是公平的，在物理完美的意义上，所有的可能结果将是等可能事件，意思是当我们投掷硬币时，我们将有 50%的机会得到正面，也有 50%的机会得到反面. 同样，在任意一次骰子投掷中，得到骰子六个面中的每一个，都将有 $\frac{1}{6}$ 的机会.

三个公理描述了概率的数学特征. 假设某个事件 E，存在这样几个事件的集合，它们是互不包含且完全穷尽的，这些集合是

$$E_1, E_2, E_3, \cdots, E_n$$

这里 E_i 指这些事件中任意一个. 这三个公理如下.

公理 1 集合 E_i 中任意事件要么发生要么不发生. 如果我们给发生赋值 1，给不发生赋值 0，我们可以表示为

$$0 \leqslant P(E_i) \leqslant 1$$

这里 $P(E_i)$ 指事件 E_i 发生的概率.

公理 2 集合中的每个事件(E_i)有一个概率，所有这些事件的概率加在一起构成了值 1：

$$\sum P(E_i) = 1$$

公理 3 多个独立事件发生的概率等于这些事件概率的和.

$$P(E_1 + E_2 + E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$$

概率时常被表示为大量多次试验中事件发生的相对频率. 在这个意义下，概率能从数学上表达为相对频率的极限. 依据英国逻辑学家 John Venn(1834—1923)的说法，我们将概率的主要公式描述如下.

假设在 n 次试验中一个事件 E 发生了 f 次，那么当 n 趋向于无穷的时候，这个事件的概率 $P(E)$ 将为频率 f/n 的极限.

$$\boxed{P(E)=\lim_{n\to\infty}\frac{f}{n}}$$

实际上，n 无真达到无穷，公式也是有效的. 关键点就是，只要 n 是一个很大的数，就能达到有效性. 因此，为了实际的用途，公式可被简化为

$$\boxed{P(E)=\frac{f}{n}}$$

例 3.4.1　从一副完整的扑克牌中抽出一张幺点牌的概率是多少？

一副扑克牌的牌数为 n，有 52 张牌. 因为只包含四种幺点，f 是 4，概率为

$$P(E)=\frac{f}{n}$$

$$P(\text{幺点})=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$$

例 3.4.2　某公司有一个潜在管理人员的人才池，用于管理职位的考察. 8 个人仅有管理学位，4 个人仅有工程学位，6 个人有不同于管理和工程领域的学位，2 个人拥有管理和工程的双学位见表 E3-4-2a. 依据他们的学位可以计算选中管理者的概率.

- 被选中的管理者来自于只有管理学位的人的概率是

$$P(\mathrm{M})=\frac{8}{20}=40\%$$

- 被选中的管理者来自于只有工程学位的人的概率是

$$P(\mathrm{E})=\frac{4}{20}=20\%$$

- 被选中的管理者来自于有管理或工程之外其他学位的人的概率是

$$P(\mathrm{N})=\frac{6}{20}=30\%$$

- 被选中的管理者来自于有管理和工程双学位的人的概率是

$$P(\mathrm{E}\cap\mathrm{M})=\frac{2}{20}=10\%$$

- 被选中的管理者是一个工程师，不论其有没有第二学位的概率是

$$P(\mathrm{AE})=\frac{6}{20}=30\%$$

- 被选中的管理者有管理学位，不论其有没有第二学位的概率是

$$P(\mathrm{AM})=\frac{10}{20}=50\%$$

表　E3-4-2a

学位	管理	非管理	总计
工程	2	4	6
非工程	8	6	14
总计	10	10	20

表 E3-4-2b

学位	管理	非管理	总计
工程	10%	20%	30%
非工程	40%	30%	70%
总计	50%	50%	100%

- 被选中的将是持有非管理学位的管理者的概率是

$$P(\mathrm{NM}) = \frac{10}{20} = 50\%$$

- 被选中的将是持有非工程学位的管理者的概率是

$$P(\mathrm{NE}) = \frac{14}{20} = 70\%$$

我们现在把这些概率记录在表 E3-4-2b 中，并观察它们是如何在两个方向上加到 100%的.

3.5 数学期望和期望值

我们已经把概率表述为相对频率，意思是概率分布是长期频率的分布. 这也意味着一个随机变量概率分布的平均值反映了分布的中心位置. 因此，随机变量的取值和取值发生的概率，二者对形成一个加权平均都是重要的，它反映了分布的均值，被称为随机变量的期望值，意思就是这个值是我们期望发生的.

如果我们考虑 x 为一个离散随机变量的值，$P(x)$是它发生的概率，那么一个变量的期望值就是变量的所有取值在它们自身的概率加权的和，恰好等于分布的均值 μ.

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i) = \mu$$

例 3.5.1 表 E3-5-1a 列出了某只股票的可能回报率，以及每个回报率有多大可能，我们可以计算回报率的期望值，它也是加权平均或者分布的均值. 所以回报率的期望值或者平均回报率比 10%多一点点.

表 E3-5-1a

回报率 x	概率 $P(x)$	$x(P_x)$
0.10	0.13	0.013
0.12	0.19	0.0228
−0.08	0.05	−0.004
0.095	0.12	0.0114
0.14	0.08	0.0112
0.11	0.21	0.0231
0.125	0.15	0.018 75
−0.089	0.07	−0.006 32
		$\sum xP(x)=0.100\ 35$

表　E3-5-1b

(1)x	(2)$f(x)$	(3)$P(x)$	(4)$xP(x)$	(5)$f(x)P(x)$
1	10.75	0.20	0.20	2.15
3	12.25	0.30	0.90	3.675
4.5	13.375	0.10	0.45	1.3375
6	14.5	0.20	1.20	2.90
8.5	16.375	0.10	0.85	1.6375
10	17.5	0.10	1.00	1.75
			4.60	13.45

如果我们知道 x 的概率，用上述计算单个随机变量期望值的相同办法，我们也能得到一个离散型随机变量函数 $f(x)$的期望值：

$$\boxed{E[fx] = \sum f(x)P(x)}$$

例如，对于一个 x 的线性函数

$$Y = f(x) = a + bx$$

如果 $a=10$，$b=0.75$，则函数是

$$f(x) = 10 + 0.75x$$

假设 x 的概率被列出在表 E3-5-1b 的第三列，那么函数的期望值能被计算如表的第五列. 所以函数的期望值是

$$E[f(x)] = \sum f(x)P(x) = 13.45$$

要得到函数的期望值，还可以采用如下的方法：

$$E[f(x)] = E(a + bx)$$

$$\boxed{E[f(x)] = bE(x) + a}$$

因为 $E(x)$等于 $xP(x)=4.60$，并且 $b=0.75$，$a=10$，

$$E[f(x)] = 0.75(4.60) + 10 = 13.45$$

3.6　方差

方差(σ^2)和标准差(σ)或许是最重要的变量度量方式. 在随机变量概率分布的背景下，方差是随机变量(x)距其均值(μ)偏差平方的期望值. 在方差(σ^2)计算中，x 取值发生的概率仍然用作权重.

$$\sigma^2 = E[(x - \mu)^2]$$

$$\boxed{\sigma^2 = \sum[(x - \mu)^2]P(x)}$$

就像在表 3-1 中做的一样，我们使用表 E3-5-1b 的数据计算方差. 故方差是 8.19，我们还可以用如下公式计算方差

$$\boxed{\sigma^2 = E(x^2) - [E(x)^2]}$$

其中 $E(x^2)$是随机变量平方(x^2)的期望值，而$[E(x)]^2$ 是 x 期望值的平方. 我们可以通过

表 3-1

x	$P(x)$	$xP(x)$	$x-\mu$	$(x-\mu)^2$	$(x-\mu)^2P(x)$
1	0.20	0.20	−3.6	12.96	2.592
3	0.30	0.90	−1.6	2.56	0.768
4.5	0.10	0.45	−0.10	0.01	0.001
6	0.20	1.20	1.4	1.96	0.392
8.5	0.10	0.85	3.9	15.21	1.521
10	0.10	1.00	5.4	29.16	2.915
	$\sum xp(x)=\mu=4.60$			$\sum(x-\mu)^2P(x)=\sigma^2=8.19$	

表 3-2

x	$P(x)$	$xP(x)$	x^2	$x^2P(x)$
1	0.20	0.20	1	0.20
3	0.30	0.90	9	2.7
4.5	0.10	0.45	20.25	2.025
6	0.20	1.20	36	7.2
8.5	0.10	0.85	72.25	7.225
10	0.10	1.00	100	10
		$E(x^2)=4.60$		$E(x^2)=29.35$

创建更多列编制表 3-2，实现对这个公式的应用. 给出

$$E(x^2)=\sum x^2P(x)$$

我们到表 3-2 中，找出 $E(x)=4.60$ 和 $E(x^2)=29.35$，应用公式如下

$$\sigma^2=E(x^2)-[E(x)]^2=29.35-(4.60)^2=8.19$$

随机变量方差的思想实际上是在数据方差原始思想的基础上建立起来的，而数据又起始于样本和总体的背景上. 也就是说，n 个观察值样本的方差(称为**样本方差**(s^2))可通过如下计算得到

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$$

其中 x_i 是变量的取值，$\bar{x}$ 是样本均值，n 是样本容量. 可是，如果需要求出整个总体的方差(称为**总体方差**(σ^2))，我们用以下公式计算

$$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{N}$$

其中 μ 是总体均值，N 是总体容量.

例 3.6.1 如表 E3-6-1 第一列所示，计算大学生身高的小样本的样本方差.

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}=\frac{2.1}{10-1}=0.233$$

表　E3-6-1

x_i	$\bar{x}$	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	x_i^2
5.9	5.8	0.1	0.01	34.81
5.2	5.8	−0.6	0.36	27.04
6.1	5.8	0.3	0.09	37.21
6.4	5.8	0.6	0.36	40.96
5.3	5.8	−0.15	0.25	28.09
6.0	5.8	0.2	0.04	36.00
6.5	5.8	0.7	0.49	42.25
5.1	5.8	−0.7	0.49	26.01
5.8	5.8	0	0	33.64
5.7	5.8	−0.1	0.01	32.49
58			$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2=2.1$	338.5

计算样本方差的另一个公式是

$$\boxed{s^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2/n}{n-1}}$$

$$s^2=\frac{338.5-(58)^2/10}{10-1}=0.233$$

3.7　标准差

标准差(σ)是方差的平方根. 它仍然是可变性的度量，也是随机变量的可能取值距离均值的离差的度量. 标准差的意义源于以下客观事实：标准差越大，数据的离差越大，距均值的变化性也越高.

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma=\sqrt{\sum(x-\mu)^2p(x)}$$

且

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{N}}$$

并且，对样本标准差(s)来说，有

$$s=\sqrt{s^2}$$

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$$

在 3.6 节的例子中，当方差 σ^2 是 8.19 的时候，标准差 σ 则是

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{8.19} = 2.86$$

而且，当样本方差 s^2 是 0.233 时，标准差 s 则是

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0.233} = 0.483$$

3.8 协方差

两个变量 X 和 Y 之间的**协方差**就是各自距均值偏差乘积的期望值.

$$\boxed{\mathrm{Cov}(x,y) = E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)]}$$

协方差的唯一符号是有意义的.

- 如果 $\mathrm{Cov}(x, y)>0$：两个变量向相同的方向一起变动.
- 如果 $\mathrm{Cov}(x, y)<0$：两个变量向相反的方向相互变动.
- 如果 $\mathrm{Cov}(x, y)=0$：两个变量没有线性关系.

协方差的量级不能指示变量之间线性关联的强度，除非协方差联系两个变量的标准差. 因此，如果用变量标准差的乘积去除 x 和 y 的协方差，我们就得到了相关系数(参见 3.9 节).

例 3.8.1 表 E3-8-1 给出了两种产品(x 和 y)六个月销售的概率分布，计算这两种产品的协方差.

表 E3-8-1

(1) x	(2) y	(3) P	(4) $xP(x)(1\times3)$	(5) $x-E(x)$	(6) $yP(y)(2\times3)$	(7) $y-E(y)$	(8) $[x-E(x)][y-E(y)]P(5\times7)$
5.0	0.49	0.15	0.75	−1.97	0.0735	−0.17	0.05
7.5	0.68	0.20	1.5	0.53	0.136	0.02	0.002
6.2	0.59	0.30	1.86	−0.77	0.177	−0.07	0.016
8.2	0.79	0.15	1.23	1.23	0.1185	0.13	0.024
7.8	0.72	0.10	0.78	0.83	0.072	0.06	0.005
8.5	0.83	0.10	0.85	1.53	0.083	0.17	0.026
			6.97		0.66		0.123
			$E(x)$		$E(y)$		$\mathrm{Cov}(x, y)$

协方差是

$$\mathrm{Cov}(x,y) = \sum[(x-E(x))(y-E(y))P] = 12.3\%$$

这里唯一重要的结论是协方差是正的，意味着两个变量之间是明确地线性相关的，即它们一起上升和下降.

3.9 相关系数

两个变量 x 和 y 之间的相关程度，用它们之间的线性关系程度来度量，它揭示了变量以直线方式如何移动，以什么方向移动，怎么相互关联，以什么方式相互关联. 相关系数是用两个变量之间的协方差除以它们标准差的乘积来计算的.

$$\boxed{\mathrm{Corr}_{x,y} = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}}$$

样本水平上的**相关系数**则为

$$r_{x,y}=\frac{ss_{x,y}}{\sqrt{ss_x}\ \sqrt{ss_y}}$$

相关系数可以解释如下：

- 如果 $\mathrm{Corr}_{x,y}=1$：x 和 y 是完全正线性相关关系，它们一起沿着相同方向变动．如果 x 增加，y 也增加，反之亦然．
- 如果 $\mathrm{Corr}_{x,y}=-1$：x 和 y 是完全负线性相关关系，它们一起沿着相反方向变动．如果 x 增加，则 y 减小，反之亦然．
- 如果 $\mathrm{Corr}_{x,y}=0$：x 和 y 没有线性相关关系，x 向任意方向移动都不会影响到 y．同时，y 向任意方向移动也不会影响到 x．
- 如果 $-1<\mathrm{Corr}_{x,y}<0$：x 和 y 是负相关关系，系数的程度反映了相关性的强弱．所以，如果 $\mathrm{Corr}_{x,y}=-0.9$，表示强负相关；但是如果 $\mathrm{Corr}_{x,y}=-0.2$，表示弱负相关，诸如此类．
- 如果 $0<\mathrm{Corr}_{x,y}<1$：x 和 y 是正相关关系，系数的程度反映了相关性的强弱．所以，如果 $\mathrm{Corr}_{x,y}=0.9$，表示强正相关；但是如果 $\mathrm{Corr}_{x,y}=0.2$，表示弱正相关，诸如此类．

例 3.9.1 计算例 3.8.1 中两个变量之间的相关系数．我们已经计算了 x 和 y 的协方差，还需要计算两个变量各自的标准差．为此从表 E3-8-1 中借用(3)、(5)、(7)列，完成表 E3-9-1，用两列以上去计算方差，然后计算标准差．

$$\sigma_x=\sqrt{\sigma_x^2}=\sqrt{1.346}=1.16$$

$$\sigma_y=\sqrt{\sigma_y^2}=\sqrt{0.012}=0.109$$

$$\mathrm{Corr}_{x,y}=\frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{0.123}{1.16(0.109)}=0.97$$

表 E3-9-1

(1)P	(2)$x-E(x)$	(3)$[x-E(x)]^2$	(4)$[x-E(x)]^2P$	(5)$y-E(y)$	(6)$[y-E(y)]^2$	(7)$[y-E(y)]^2P$
15	−1.97	3.881	0.582	−0.17	0.029	0.004 35
0.20	0.53	0.281	0.056	0.02	0.0004	0.000 08
0.30	−0.77	0.593	0.178	−0.07	0.005	0.0015
0.15	1.23	1.513	0.227	0.13	0.017	0.002 55
0.10	0.83	0.689	0.069	0.06	0.0036	0.000 36
0.10	1.53	2.34	0.234	0.17	0.029	0.0029
			$\sigma_x^2=1.346$		$\sigma_y^2=0.012$	

结果意味着 x 和 y 几乎是完全正相关的．

3.10 正态分布

统计数据的**正态分布**格外著名，是因为它具有钟形曲线，也就是众所周知的高斯曲

线. 一个多世纪以来，正态分布的发现没有给 Carl Friedrich Gauss(1777—1855)和 Marquis de Laplace(1749—1827)带来声誉. 此后长时间都没有引起人们多大关注，直到 1924 年 Karl Pearson 找到了 1733 年由 Abraham De Moivre(1667—1754)出版的原始手稿，其中包括了对正态分布的首次分析及其方程.

正态分布是一种连续分布，具有以均值或期望值分散分布的对称性，其图像为钟型的形状. 自然界和人类生活中有许多变量都有数字观察值，这些数值的趋势自然聚集在均值周围. 因此，这类曲线提供了一个良好的数据分析模型，它在估计抽样结果的精度方面大有用处. 这就是正态分布能逼近频率分布的原因，而频率分布能从诸多自然、物理、人文等现象中观察到，比如智商、身高、体重、销售、回报以及人机交互等. 特别是当样本容量增大的时候，正态分布也能用来估计二项概率.

正态分布的概率密度函数很大程度依赖于分布的均值和它的标准差：

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2} \quad 其中 -\infty\leqslant x\leqslant+\infty$$

其中 μ 是正态随机变量的均值，σ 是分布的标准差，e 是 2.718 28，π 是 3.141 59.

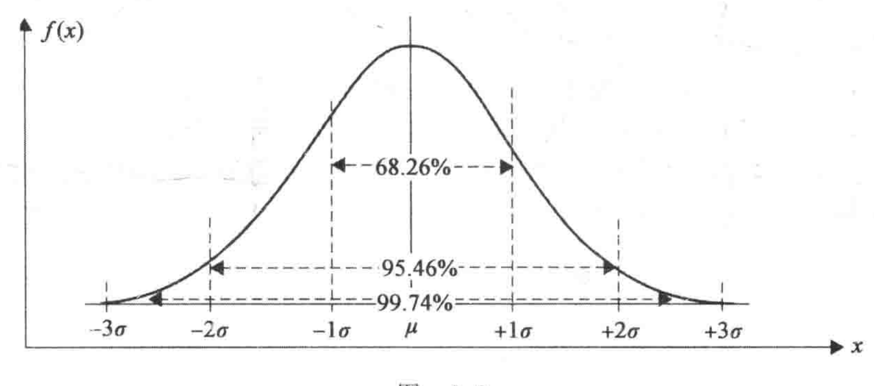


图 3-3

标准正态分布有均值 0 和标准差 1，而均值和标准差的任意组合都能确定唯一的正态分布. 曲线下面的总面积看作 100%，被分成均值右侧的 50%和均值左侧的 50%，如果随机变量的取值位于某两点之间，该事件发生的概率等于这两点之间曲线下方的面积. 图 3-3 中的曲线图显示了一个变量的实际值将落在距均值±1 个标准差的范围之内的概率为 68.26%；落在±2 个标准差的范围之内的概率为 95.46%；落在±3 个标准差的范围之内的概率为 99.74%.

由此可以得到一个一般结论：分布的标准差越大，数据的变动性和离散性也越大，变量距分布均值的期望值也越大. 在这种情形下，结果不同于均值或期望的概率是很高的. 反之也成立. 标准差越小，变动性和离散性也越小，结果越接近期望值，或结果不同于期望的概率将更小.

单元一附录

小结

安排这个单元的目的，一是为了唤起读者对许多基础数学概念的记忆，二是回顾过去经常使用的求解金融问题的术语. 我们以数和分数开始，既区别了实数和虚数，也区分了有理数和无理数. 我们讨论了真分数和假分数，也讨论了带分数和繁分数. 解释了小数、循环数和百分数，事实上百分数既是最常用的概念，也是最容易出错的地方.

对比率、比例和整除也做了说明，与此同时，理解指数和对数也是基本的. 这些规则、函数和用途与许多数理金融问题的本质密切相关. 代数、几何、递推以及无穷等比数列也与许多金融问题息息相关，我们为此做了一些简短讨论.

我们讨论了增长和衰减函数以及曲线，因为它们关联着指数函数. 我们也讨论了应用更加广泛的以自然对数为底的增长和衰减函数. 然后，我们引入了更为相关的概念，比如组合原则和术语，特别是排列与组合.

概率是大量金融和经济应用的中心话题，主要是因为它直接关联数学期望以及相关变量概念的计算，比如方差和标准差. 作为度量随机变量的行为以及相互关联的工具，我们描述了协方差和相关系数. 最后，我们解释了数据的正态分布的思想，这是理解和解释频率分布的最重要的概念之一，而频率分布能从许多自然、物理、人文，当然还有金融度量中观察到.

公式列表

百分量

$$P = B \cdot R$$

基量

$$B = \frac{P}{R}$$

百分率

$$R = \frac{P}{B}$$

极值和均值

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \rightarrow \frac{A}{C} = \frac{B}{D} \rightarrow AD = BC$$

指数律

$$\log X + \log Y = \log XY$$

$$X^a \cdot X^b = X^{a+b}$$

$$\frac{X^a}{X^b} = X^{a-b}$$

$$(X^a)^b = X^{ab}$$

$$(XY)^a = X^a X^b$$

$$\left(\frac{X}{Y}\right)^a = \frac{X^a}{Y^a}$$

$$\frac{1}{X^a} = X^{-a}$$

$$\sqrt[a]{X} = X^{1/a}$$

$$\sqrt[a]{X^b} = X^{b/a}$$

$$X^0 = 1 \quad X \neq 0$$

自然指数律

$$e = \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$e^0 = 1$$
$$e^1 = 2.718\ 281\ 282$$
$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$$
$$(e^a)^b = e^{ab}$$
$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

对数律

$$\log X + \log Y = \log XY$$
$$\log X - \log Y = \log \frac{X}{Y}$$
$$\log_X^a = a \log X$$
$$\log \sqrt[a]{X} = \log X^{1/a} = \frac{1}{a}\log X = \frac{\log X}{a}$$
$$\log 1 = 0$$
$$\log 10 = 1$$

等差数列

$$a_n = a_i + (n-1)d$$

等差数列的和

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

等比数列

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

等比数列的和

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

无穷等比数列

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$
$$S_n = \frac{a_1}{1-r} - \frac{a_1 r^n}{1-r}$$

增长衰减函数

$$Y = ab^x$$
$$Y = ae^x$$
$$Y = ae^{-x}$$

n 的阶乘

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \cdots \cdot 1$$

mn 原则

$$N = mn$$

排列

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$
$$P_n^r = \frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_m!}$$

组合

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

概率

$$P(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{f}{n}$$

数学期望

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i) = \mu$$
$$E[f(x)] = \sum f(x)P(x)$$
$$E[f(x)] = bE(x) + a$$

方差

$$\sigma^2 = E[(x-\mu)^2]$$
$$\sigma^2 = \sum[(x-\mu)]^2 P(x)$$
$$\sigma^2 = E[(x^2) - [E(x)]^2$$
$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$
$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N}$$
$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

标准差

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$
$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x-\mu)^2 P(x)}$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{N}}$$

$$s=\sqrt{s^2}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$$

协方差

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]$$

相关系数

$$\mathrm{Corr}_{x,y}=\frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$r_{x,y}=\frac{SS_{x,y}}{\sqrt{SS_x}\sqrt{SS_y}}$$

正态分布函数

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot \mathrm{e}^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}$$

习题

1. 把$\frac{12}{16}$改写为缩小项的分数，把$\frac{3}{5}$改写为放大项的分数.
2. 把$\frac{5}{4}$改写为带分数的形式，把$1\frac{2}{3}$变成普通分数的形式.
3. 把$\frac{5}{27}$变为小数并循环到四个小数位.
4. 把 9.4 改写为普通分数.
5. 如果你缴纳的房地产税每年是 4500 美元，税率是 3%，该栋房子的价值是多少？
6. 杰克做两份工作，他从第一份工作中获得的年收入是 37 600 美元，从第二份工作中获得的收入是 9400 美元，写出第二份收入对第一份收入比率形式的关系.
7. 证明 $x^K/x^L=1/x^{K-L}$.
8. 化简$(2xx^2/y^2y)^3$.
9. 化简$(\sqrt{x^4}\sqrt[3]{y^2}/xy^3)^{-3}$.
10. 求出 M：$M=\log_3\sqrt[5]{3}$.
11. 解出 G：$\log_9 G=\frac{3}{2}$.
12. 解出 x：$20(2.25)^x=120$.
13. 给定等差数列$-\frac{1}{6}$，$\frac{1}{12}$，$\frac{1}{3}$，…，求第 10 项和前 12 项的和.
14. 给定等比数列 625，125，25，…，求第 6 项和前 15 项的和.
15. 绘出函数 $y=230(1.34)^x$ 的图像.
16. 求字母 v，w，x，y，z 一次取出 5 个的排列数.
17. 写出字母 M、N、O 每次三个的六种不同排列.
18. 在 15 名学生的班级中，能组建多少个 5 名学生的团队？
19. 计算 $4C_2$ 和 $5C_3$.
20. 一个袋子中装有 6 个绿球，2 个蓝球，2 个红球，如果你从袋中抽出一个红球，你将赢得 20 美元，你愿意为抽球的一张票付出多少费用呢？

21. 计算 x 的方差和标准差，x 以概率 y 取下表的值.

x_i	3.5	4.8	−2.8	5.5	6.1	3.7
P	0.15	0.20	0.25	0.10	0.20	0.10

22. 计算习题 21 中具有下列 y 的 x 的协方差.

y_i：3.9　4.2　−2.5　5.0　6.7　3.5

23. 上题 x 和 y 之间的相关系数是多少？

单元二 Unit 2

货币时间价值

导言

第 1 章　单利

第 2 章　银行贴现

第 3 章　复利

第 4 章　年金

导　言

货币的时间价值是金融领域关键的理论概念和基础工具，指货币价值随时间上下波动的双向属性．一般来说，在没有利率的条件下，货币倾向于现在价值较高，而将来则价值较低．这一事实能用三大因素解释，即通货膨胀、消费者耐心不足和寿命的不确定性．**通货膨胀**大体稳定地推高商品和服务的价格水平．当物价增长的时候，货币的购买力在下降．原因很简单，通货膨胀开始之后，购买和通胀之前相同的东西，将需要更多的货币支付．然而，即使没有通货膨胀，某些非通胀因素，比如顾客耐心不足和不确定的寿命等，也将促使货币价值将来比现在低．**顾客耐心不足**指人们一般对今天的满意度胜过明天的满意度．对喜欢的汽车或立体声音响，几乎任何一个人都宁愿今天购买它们获得更大满意度，而不是选择下一年或下一个月购买，只获取很少的满意度水平．所以，从购买商品和服务中立即得到的直接效用，赋予了货币较高的当前价值，而一个稍后的时间则赋予了较低的货币价值，形成了一种延滞效用．**寿命的不确定性**对效用货币时间的拓展产生了很大的风险．例如，如果奖金延期一年交付，获奖人将可能很失望．管理奖金的规章制度可能不合时宜地发生改变，责任和义务也可能会增大，对奖金的征税和伴随收费都有可能提高，还有许多其他的事情也可能发生，并危害其获收过程，或者至少降低了奖金的收益．所以，不久就收到奖金将给货币较高的当前价值，延迟收到将降低奖金的价值．

因为考虑到通货膨胀、耐心不足和不确定性等所有这些理由，人们更好的选择就是尽可能快地花掉他们的钱．可是，如果他们被迫等待并且放弃由花钱带来的即期满意度，理应获得牺牲即期消费的补偿报酬．我们把这种报酬称为**利息**，定义为货币服务的价格，既是货币时间价值概念的焦点，也是金融理论和金融实践的核心．**利率**是借款人因为使用贷款人出借的资金，而不得不支付给贷款人使用所借资金的报酬．这个比率通常表示为初始借入资金额的百分比．由于货币一般以价值或财富的存贮手段为特征，所以利率也可能反映了持有价值或财富的机会成本，这些价值和财富可由其他金融替换产品赚得．

利率已经变成一个国家经济绩效的重要指示器．它们时常被视为商业步伐和国家繁荣最重要的调节器．对消费者而言，无论他们是借钱购买房子，还是把收入的一部分存起来或用以投资，还是为退休而设立养老基金，或者为了孩子将来的教育而建立教育基金，利率都是决定性的关键因素．对商家而言，在他们拓展运营规模、冒险进入新的投资项目，或者发展产品创新的过程中，利率也是至关重要的决定因素．当涉及利率的时候，货币时间价值的计算是双向的．首先，随着我们从现在走向未来，货币价值将随之而增加．在价值上的这样一个增量来源于利率的补偿效应，包括了**单利**和过程累计的**复利**两个方面．其次，当我们从将来倒回到现在时，货币的价值将随之而减少．这种被称为**贴现**的递减过程的价值下降，是由于**贴现**率造成的贬值效应．

在所有货币时间价值的计算中，包括了 5 个关键的术语：

1. 货币的当期价值，由于它用存入或投资的初始资金量来表示，所以常常被称为**本**

金、当前值或现值.

2. 货币在将来的价值，常常被称为**将来值**，也就是由于利率的不断累积当前值增长到未来后的现值.

3. 现行的利率，其实是一种比率，应用该比率能把现值转变为将来值. 它也能反向作用，把将来值变回到初始值，在这种情形下，它被称作**贴现率**.

4. 到期的时间，在现值和将来值之间的时间跨度.

5. 定期付款.

一般地，大多计算涉及根据其余变量对一个变量求解. 尽管在有些例子中介绍了表格方法，但是用数学公式计算是本书的焦点. 金融计算器和计算机方法不做讨论. 对金融变量的计算，要么基于利率累积的简单处理，要么基于利率累积的复合处理. 一开始我们采用单利和贴现，然后介绍复合方法，这些方法涵盖单笔资金量和定期支付现金流二者.

第1章 单　利

1.1 总利息

在单利方法中，要评估本金的收益，利息是仅有的方式．因为我们强调货币价值随时间的波动性，本金(principal)也被称为**现值**(Current Value，CV)，反映初始资本金的货币价值，和它在当前时间任意指定时刻的价值一致．同时，**未来值**(Future Value，FV)表示在某一个利息率(r)的影响下，本金经过某一个期限(n)将增长到的货币价值．因此，总单利(I)就是对某现值的累积，可以采用如下公式计算：

$$\boxed{I = \mathrm{CV} \cdot r \cdot n}$$

例 1.1.1 一笔2000美元、5年期的存款，存款账户产生3.5%的年单利，总利息是多少？

$$I = \mathrm{CV} \cdot r \cdot n = 2000(0.035)(5) = 350$$

1.2 利息率

如果其余三个条件[总利息所得(I)、到期期限(n)、初始投资资金量(CV)]都给定，我们就能得到利息率(r)：

$$\boxed{r = \frac{I}{\mathrm{CV} \cdot n}}$$

例 1.2.1 Jill在本地银行存入1500美元，存期3年，得利236.25美元，利率是多少？

$$r = \frac{236.25}{1500(3)} = 0.0525 = 5.25\%$$

1.3 到期期限

用相同的方式，如果给定CV、I和r，我们就能得到到期期限(n)．

$$\boxed{n = \frac{I}{\mathrm{CV} \cdot r}}$$

例 1.3.1 如果Jill把存款数额翻倍，存入另外一家本地银行，假设该家银行将付5.5%的利率，某段时间后她可以获得825美元的总利息．试问为了得到825美元的利息，Jill将不得不把钱存在那家银行多久？

$$1500 \times 2 = 3000$$

$$n = \frac{825}{3000(0.055)} = 5$$

1.4 现值

给定总利息所得(I)、利息率(r)和到期期限(n)，我们就能得到现值(CV).

$$\boxed{\mathrm{CV}=\frac{I}{r\cdot n}}$$

例 1.4.1 为了在第 4 年末收到 1000 美元总利息，Jill 当前应该以利率 6%存入多少钱?

$$\mathrm{CV}=\frac{1000}{0.06(4)}=4167$$

注意到本书中用到的当前值(current value)和使用其他书中的现值(Present value)是一个同义词. 在金融文献中，这两个词是可以交换使用的，但是为了更加准确，现值(恰如我们后面将看到的一样)比当前值反映更多内容.

1.5 将来值

如果把所获总利息(I)加到初始存款额或投资额(CV)，我们将得到到期金额或将来值(FV)，这是现值将增长到的数额.

$$\mathrm{FV}=\mathrm{CV}+I$$

$$\mathrm{FV}=\mathrm{CV}+\mathrm{CV}\cdot r\cdot n$$

$$\boxed{\mathrm{FV}=\mathrm{CV}(1+rn)}$$

例 1.5.1 Amy 借款 900 美元，借期 16 个月，年单利率 7%，到期将归还多少钱?

因为 16 个月=1.33 年

$$\mathrm{FV}=\mathrm{CV}(1+rn)=900[1+0.07(1.33)]=983.79$$

1.6 现值和将来值都已知，求利息率(r)和到期期限(n)

在方程 $\mathrm{FV}=\mathrm{CV}(1+rn)$中，有 r 和 n 两个变量，我们能在已知一个变量的情况下求出另一个变量.

$$\boxed{r=\frac{(\mathrm{FV}/\mathrm{CV})-1}{n}}$$

和

$$\boxed{n=\frac{(\mathrm{FV}/\mathrm{CV})-1}{r}}$$

例 1.6.1 Tom 在 2.5 年内必须要有 7500 美元，而目前在他的存款账户中仅有 6218 美元，试问他将以何单利率能在 2.5 年后获得 7500 美元?

$$r=\frac{(\mathrm{FV}-\mathrm{CV})-1}{n}=\frac{(7500/6218)-1}{2.5}=0.0825$$

利率必须是 8.25%.

例 1.6.2 如果 Tom 需要 9000 美元，并且利率降到了 8%，他需要把存款账户中 6218 美元存多久？

$$n=\frac{(\mathrm{FV}/\mathrm{CV})-1}{r}=\frac{(9000/6218)-1}{0.08}=5.5$$

他至少需要存钱 5.5 年.

1.7 简单贴现

如果把 1.5 节所示的得到将来值(FV)的过程倒过来，我们将能从将来值、利率和时间中得到现值(CV). 得到现值的这个过程被称为**简单贴现**，因为它把将来值从终止日期带回到了当前时刻. 所以，现值能如下计算为

$$\boxed{\mathrm{CV}=\frac{\mathrm{FV}}{1+rn}}$$

对无息贷款和附息贷款这两种类型的债务，我们可以使用简单贴现从将来值得到现值.

无息将来数额的简单贴现

例 1.7.1 一笔 5500 美元的债务，期限 8 个月，年利率是 6.5%，计算该债务的简单贴现. FV= $5500; $n=8/12$; $r=6.5\%$(见图 E1-7-1).

$$\mathrm{CV}=\frac{\$5500}{1+0.065(8/12)}=\$5271.56$$

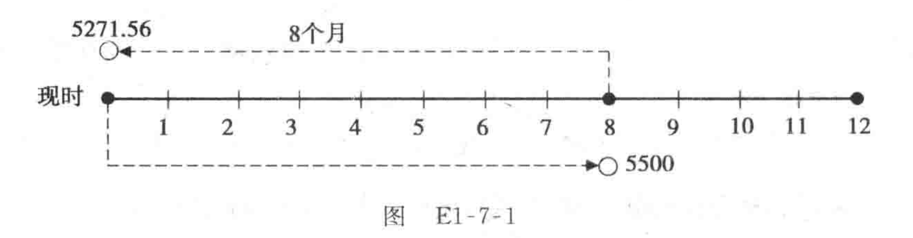


图 E1-7-1

原始数额和已贴现数额之间的差就是简单贴现. 因为过程的可逆性，我们注意到 6.5% 的利率是和贴现率相同的. 如果在现在时刻，我们知道 5271.56 美元的初始额已经发生，我们想看看现值以 6.5%的利率将在 8 个月增长到多少的话，我们得到的结果是 5500 美元.

$$\mathrm{FV}=\mathrm{CV}(1+rn)=\$5271.56[1+0.065(8/12)]=\$5500$$

附息将来数额的简单贴现

例 1.7.2 Dina 以 12%的利率借了 10 个月期限的借款 3500 美元，但是 3 个月后她不得不去出国，并且她的借款人同意用 14%贴现贷款，试问她必须支付多少钱？

因为这是一个附息债务，我们必须计算原始支付数额. CV= $3500; $n=10$ 个月; $r=12\%$(见图 E1-7-2).

$$\mathrm{FV}=\mathrm{CV}(1+rn)=\$3500\left[1+0.12\left(\frac{10}{12}\right)\right]=\$3850$$

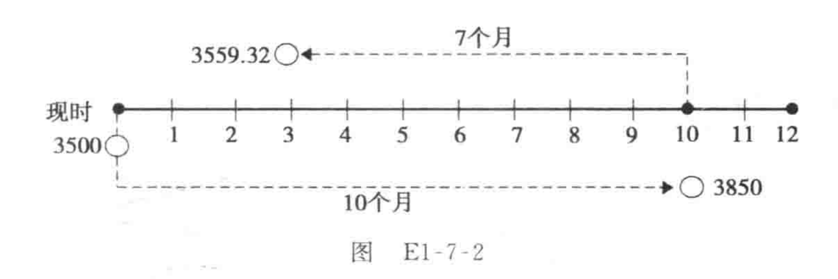


图 E1-7-2

接下来，我们把初始数额以 14%的贴现率贴现 7 个月，FV= $3850；$n$=7 个月；$r$=14%.

$$CV = \frac{FV}{1+rn} = \frac{\$3850}{1+0.14(7/12)} = \$3559.32$$

1.8 计算用天表示的期限

当到期期限用天表示的时候，有两种办法能够用于计算起始日和终止日之间的天数.

准确时间

期限将包括时间段内除去首日的所有天. 通过用终止日的序号减去起始日的序号，就可以得到期限的精确天数. 序号指在年度任意天起日历天数的累积数，如附录表 4 所示.

例 1.8.1 如果一项贷款的期限从 5 月 15 日开始，其终止日是 11 月 23 日，利用精确法计算期限包括多少天？

看序列表，找出相关联的期限日期数.

5 月 15：135

11 月 23：327

该期限的精确天数是 327－135＝192.

如果序列表不是有效的，精确时间能够用以下方法计算：

5 月：16 天(31－15＝16)

6 月：30

7 月：31

8 月：31

9 月：30

10 月：31

11 月：23

总计：192

近似时间

在这种方法中，首先计算月份数. 通过观察起始日和终止日所在月份同一天之间有多少个整月，就能够得到月份数. 年度的所有十二个月都被假设有标准的 30 天，如果在期限

中有留下来的天数，它们将被加上去.

例 1.8.2　使用近似时间方法计算例 1.8.1 中的期限天数.

从 5 月 15 日到 11 月 15 日的月数是 6

在 5 月 15 日和 11 月 15 日之间的天数是 $6\times30=180$

在 11 月 15 日和 11 月 23 日之间的天数是 $23-15=8$

总的近似天数是 $180+8=188$

1.9　名义利率和实际利率

一年每个月有 30 天的假设，就意味着全年有 360 天($12\times30=360$). 当使用每天利率计算利息的时候，并且当 360 天被用作期限比例的分母的时候，所得利率将被称作**名义利率**. 但是，当 365 天被用在分母上时，所得利率被称为**实际利率**. 然而，对闰年而言，366 天也会被使用.

例 1.9.1　使用名义利率和实际利率两种方法，计算 8500 美元经过 90 天，以 7.25%年简单利率，简单利息将是多少?

使用名义利率:

$$I_o=CV\cdot r\cdot n=8500(0.0725)\left(\frac{90}{360}\right)=\$154.06$$

使用实际利率

$$I_e=8500(0.0725)\left(\frac{90}{365}\right)=\$151.95$$

如果使用精确时间和通常利率的组合，该方法就被称作**银行家规则**，被诸多商业银行所采用. 但是，许多信用卡公司却使用精确时间和精确利率的组合.

1.10　名义利率和实际利率相互变换

$$I_o=CV\cdot r\cdot\frac{n}{360}\quad\text{或者}\quad I_o=\frac{CV\cdot r\cdot n}{360}$$

$$I_e=CV\cdot r\cdot\frac{n}{365}\quad\text{或者}\quad I_e=\frac{CV\cdot r\cdot n}{365}$$

用 I_e 除 I_o，我们得到

$$\frac{I_o}{I_e}=\frac{(CV\cdot r\cdot n)/360}{(CV\cdot r\cdot n)/365}=\frac{\cancel{CV\cdot r\cdot n}}{360}\times\frac{365}{\cancel{CV\cdot r\cdot n}}=\frac{360}{365}$$

再用 5 除:

$$= \frac{73}{72} = \frac{72+1}{72} = \frac{72}{72} + \frac{1}{72}$$

$$\frac{I_o}{I_e} = 1 + \frac{1}{72}$$

$$\boxed{I_o = I_e\left(1+\frac{1}{72}\right)} \quad 或 \quad \boxed{I_o = 1.014 I_e}$$

类似地，我们得到

$$\boxed{I_e = I_o\left(1-\frac{1}{73}\right)} \quad 或 \quad \boxed{I_e = \frac{I_o}{1.014}}$$

例 1.10.1 如果实际利率是 27.70 美元，名义利率是多少？

$$I_o = 27.70\left(1+\frac{1}{72}\right) = 27.70 + \frac{27.70}{72} = 28.08$$

例 1.10.2 由 502.66 美元的名义利率得到相关实际利率.

$$I_e = I_o\left(1-\frac{1}{73}\right) = 502.66\left(1-\frac{1}{73}\right) = 502.66 - \frac{502.66}{73} = 495.77$$

1.11 假定起息日和价值等式

给定随时间波动的货币价值，为了能公平地比较货币、适当地合并货币或者恰当地调控货币，金融中在相同时刻陈述基金是十分必要的. 为了达到这个目的，可以证明在各种时点一张**时间线图**对说明基金的价值是很有帮助的. 假定起息日就是这样一个各种基金被选择估值的日期. 更加普遍地，一个**假定起息日**就是具有不同到期日的基金价值全部回到了现在时刻的那个时刻. 换句话说，这个过程就是评估基金的将来，就好像给它们在今天支付了现款一样. 然而，假定起息日也可能是一个将来日期.

例 1.11.1 Jimmy 收到一笔贷款，他应该以分期付款的方式分三次付清，一笔 500 美元、期限 1 年的借款，一笔 1200 美元、20 个月期限的借款，一笔 1500 美元、2 年期限的借款(见图 E1-11-1). 如果年单利率是 9.5%，收回的贷款总量是多少？

我们有三个将来值，都需要逐个变回到现在，即变回到以今天为假定起息日.

$$\begin{aligned}
CV &= \frac{FV_1}{1+rn} + \frac{FV_2}{1+rn} + \frac{FV_3}{1+rn} \\
&= \frac{500}{1+0.095(1)} + \frac{1200}{1+0.095\left(1\,\frac{2}{3}\right)} + \frac{1500}{1+0.095(2)} \\
&= 456.62 + 1036 + 1260.50 \\
&= 2753.12
\end{aligned}$$

例 1.11.2 Jill 签了一笔贷款合约，支付一年 8.5%的单利，支付条款要求两次付款：9 个月内还款 5500 美元，30 个月内还款 6750 美元(见图 E1-11-2). 但是，后来 Jill 决定在 1.5 年付清所有欠款，Jill 预期付款多少美元？

假定起息日是从现在起的 1.5 年，而且不得不在假定起息日对两期付款做出评估. 注

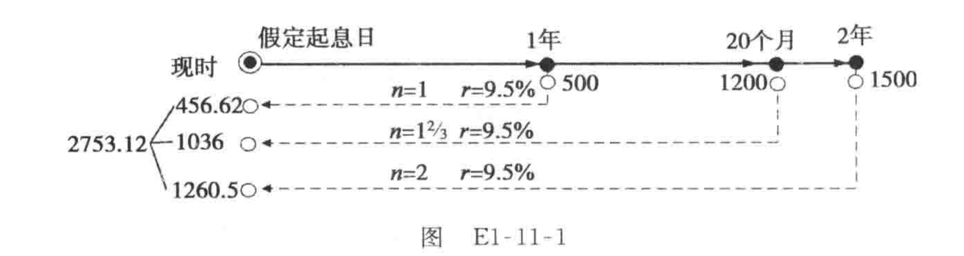


图 E1-11-1

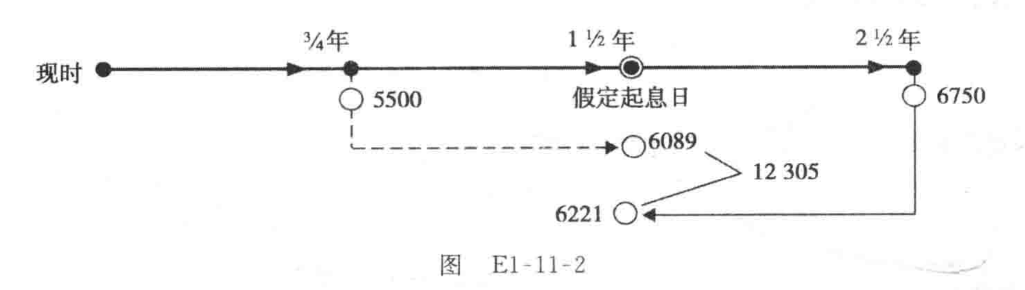


图 E1-11-2

意到首期付款的价值不得不从这个时刻向前移到假定起息日，第二笔支付的价值不得不从将来的一天拉回到假定起息日.

$$\mathrm{FV} = \mathrm{CV}(1+rn) = 5500\left[1+0.085\left(\frac{3}{4}\right)\right] = 5850.62$$

$$\mathrm{CV} = \frac{\mathrm{FV}}{1+rn} = \frac{6750}{1+0.085(1)} = 6221.19$$

在 1.5 年的支付＝5850.62＋6221.19＝12071.81

对于不同日期下的两种债务，这种在假定付息日得到付费的方法被称作**等同价值**. 我们本质上把未知单笔支付(X)等同于增长的首笔支付(FV)和贴现的第二笔支付(CV).

$$X = \mathrm{FV} + \mathrm{CV}$$

因此，一个**价值等式**就是一个数学方程，表示使用给定利息率的条件下，原始债务在特殊日期的数量价值，该日期具有新的支付、附带了假定付息日所有的价值.

例 1.11.3 一个男子借了两笔贷款：

1) 1500 美元从现在开始 2 个月到期，具有年单利 7%；

2) 750 美元从现在起 5 个月到期(见图 E1-11-3).

如果他想把两者混合成一笔从现在起 10 个月的单笔还款，给定利率为 5%，他将付出多少钱？

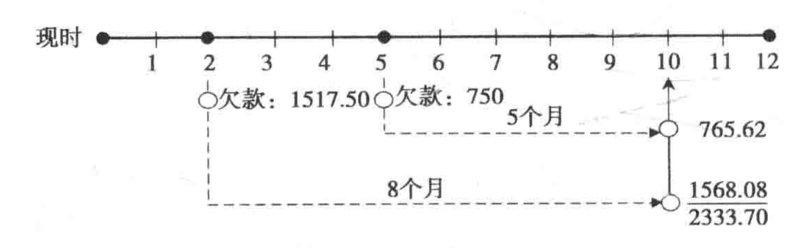


图 E1-11-3

首先，我们计算第一笔借款，它将在 2 个月到期，年利率为 7%.

$$FV = CV(1+rn) = \$1500\left[1+0.07\left(\frac{2}{12}\right)\right] = \$1517.50$$

如果这笔债务被迫在 8 个月内、以年利率 5%付清，那么

$$FV = CV(1+rn) = \$1517.50\left[1+0.05\left(\frac{8}{12}\right)\right] = \$1568.08$$

第二笔债务(750 美元)将在 5 个月、以 5%的利率支付：

$$FV = CV(1+rn) = \$750\left[1+0.05\left(\frac{5}{12}\right)\right] = \$765.62$$

从现在起 10 个月的单笔付费将是

$$\$1568.08 + \$765.62 = \$2333.70$$

这就是两笔债务的等同价值.

例 1.11.4　一男子负债 1300 美元，期限从现在起 7 个月(见图 E1-11-4). 如果他拥有支付的选择权，要么早点还清，比如从现在起 3 个月，要么迟点，在该年度末还清(即从现在起 12 个月). 给定利率是 12%，两种情形他将分别付费多少?

第一种情形下，债务将提前 4 个月支付. 在这种情形下，初始债务 1300 美元将被视为将来值，我们需要贴现为第三个月的现值.

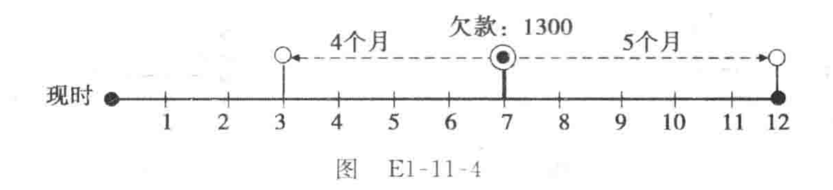


图　E1-11-4

$$CV = \frac{FV}{1+rn} = \frac{\$1300}{1+0.12(4/12)]} = \$1250$$

第二种情形，1300 美元债务被处理为原始期限日期第七个月的现值. 这里我们想得到它在年末(5 个月后)的将来值.

$$CV = \frac{FV}{1+rn} = \$1300\left[1+0.12\left(\frac{5}{12}\right)\right] = \$1365$$

1.12　等值时：求平均到期日

如果几笔债务都在不同日期到期，并且如果有一个要求用单笔支付付清所有利息，就必须找出来一个单笔支付期限的新日期. 这个还清所有债务的单笔支付的日期，被称为**平均到期日**或**等值日期**. 它跟平均期限的最后一天是相关日期，能够通过各种债务所有到期日期的加权平均得到. 它被称作**等值时**($\bar{n}$).

$$\bar{n} = \frac{\sum P_i n_i}{\sum P_i} = \frac{P_1 n_1 + P_2 n_2 + \cdots + P_k n_k}{P_1 + P_2 + \cdots + P_k}$$

其中 $i=1, 2, 3, \cdots, k$；$P_1, P_2, \cdots, P_k$ 是付款，$n_1, n_2, \cdots, n_k$ 是这些付款相应的到期日期.

例 1.12.1　一位小店店主不得不付给供应商三笔费用：在 30 天内付 200 美元，在 60

天内付 400 美元，和在 90 天内付 600 美元. 如果利率是 8%，付清所有三笔费用的单笔支付将是多少？等值日期将是多少？

首先，让我们用时间线图进行传统求解(见图 E1-12-1)，令 90 天为假定还息日. 我们得到 60 天 200 美元和 30 天 400 美元的将来值.

$$\mathrm{FV} = \mathrm{CV}(1 + rn) = 200\left[1 + 0.08\left(\frac{60}{360}\right)\right] = 202.66$$

$$= 400\left[1 + 0.08\left(\frac{60}{360}\right)\right] = 402.66$$

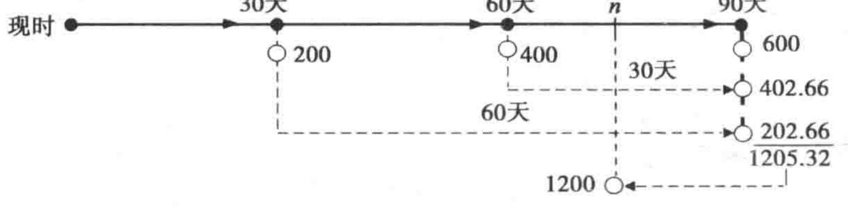


图　E1-12-1

通过把上述计算值加到 600 美元，我们能得到 90 天末期的总的将来值：

$$总\ \mathrm{FV} = 600 + 402.66 + 202.66 = 1205.32$$

因为总的初始支付是 1200 美元，我们能够推断出 1200 美元(少于 1205.32 美元)将在早于 90 天早的时间到期. 如果假设这一天就是 90 天之前的某个日期 $\bar{n}$，我们能够以期限 $\bar{n}$ 把 1205.32 美元贴现到 1200 美元，得到期限 $90-\bar{n}$.

$$\mathrm{CV} = \frac{\mathrm{FV}}{1 + rn}$$

$$1200 = \frac{1205.32}{1 + 0.08[(90 - \bar{n})/360]}$$

对 $\bar{n}$ 进行求解，我们得到

$$\bar{n} = 70\ 天$$

现在，我们能够运用求 $\bar{n}$ 公式去得到相同结果.

$$\bar{n} = \frac{P_1 n_1 + P_2 n_2 + P_3 n_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{200(30) + 400(60) + 600(90)}{200 + 400 + 600} = 70$$

1.13　分批付款

如果在到期日之前部分债务被支付，本金应该享有适当折扣，以便在总利息中减少支出能被确认. 但是，管理利息的所有细节以及如何来计算利息，都应该写进贷款合约中. 一般地，在做了一次分批付款之后，计算尚欠余额有两种方法是可行的.

1. **计息法**. 在这种方法中，假定起息日是最后的期限日期，从而每笔分批付款都具有从诞生时刻到假定起息日产生的利息. 因此尚欠余额就是负债总额和已付分批付款总和二者之间的差额.
2. **美国法**. 在这个规则中，每次分批支付后都将调整未偿本金. 任意超过利息的分批支付将从未偿本金中予以贴现，而且任意低于利息的分批支付将无利息被持有，直到

另外一次分批支付发生，最后联合支付超过利息，结果导致本金的减少.

例 1.13.1 一笔 1300 美元的贷款，具有 7%的利率，期限 1 年. 3 个月后，借款人还款 300 美元，8 个月后，又还款 500 美元. 这年末最后的尚欠余额将是多少？使用计息法和美国法两种方法计算.

由计息法(见图 E1-13-1a)：

$$FV_1 = CV(1+rn) = 1300\left[1+0.07\left(\frac{12}{12}\right)\right] = 1391$$

$$FV_2 = 300\left[1+0.07\left(\frac{9}{12}\right)\right] = 315.75$$

$$FV_3 = 500\left[1+0.07\left(\frac{4}{12}\right)\right] = 511.66$$

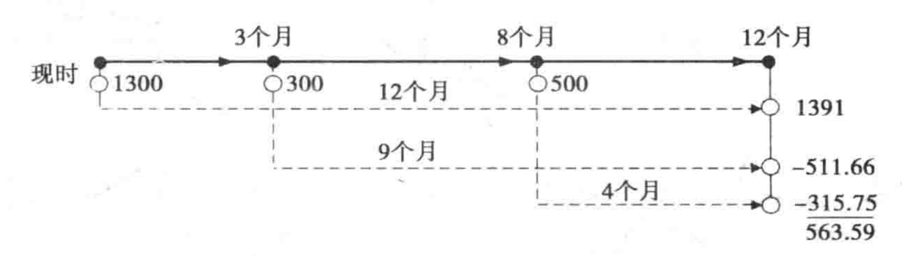


图 E1-13-1a

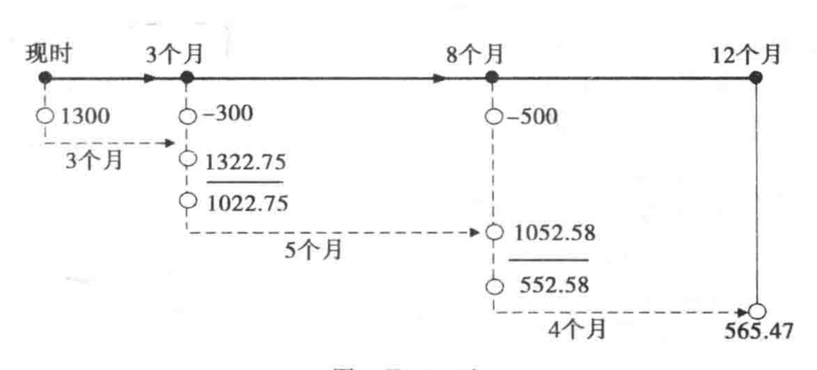


图 E1-13-1b

尚欠余额=1391−(315.75+511.66)=563.39

由美国法(见图 E1-13-1b)：

$$FV_1 = CV(1+rn) = 1300\left[1+0.07\left(\frac{3}{12}\right)\right] = 1022.75$$

$$FV_2 = 1022.75\left[1+0.07\left(\frac{5}{12}\right)\right] = 1052.58$$

$$FV_3 = 552.58\left[1+0.07\left(\frac{4}{12}\right)\right] = 565.47$$

1.14 用美元加权方法求简单利息率

当账户余额开始和结束与从基金存款和取款进出交易那样都是已知的，通常用美元加

权方法来求得简单利息率. 让我们假设一只基金在某段时期 t, 开始时余额为 B, 终止时余额为 E(见图 1-1). 也让我们假设在整个时期 t, 为了简化只有两次交易, 在时刻 t_1 存款 D, 在时刻 t_2 取款 W, 利用这些信息, 我们可以通过利用期限内的交易量的加权平均来计算简单利率 r.

$$\boxed{r=\frac{E-[(B+D)-W]}{Bt+D(t-t_1)-W(t-t_2)}}$$

这种方法仅对短期、到期期限不超过一年的基金行为是可行的.

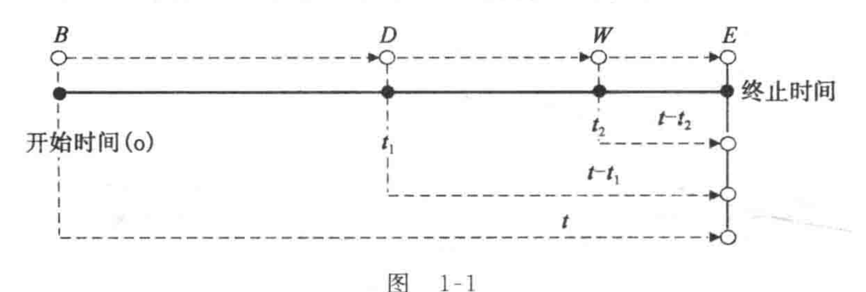


图 1-1

例 1.14.1 Sevina 2 月 1 日用 3250 美元投入一家短期投资基金, 她 4 月 1 日存款 750 美元, 8 月 1 日取款 1200 美元(见图 E1-14-1), 如果 11 月 1 日她有 3100 美元的余额, 这种基金的简单利息率是多少?

$B=\$3250$ 起始时间为 2 月 1 日

$E=\$3100$ 时刻 $t=$ 从 2 月 1 日到 11 月 1 日 $=9$ 个月

$D=\$750$ 时刻 $t_1=$ 从 4 月 1 日到 11 月 1 日 $=7$ 个月

$W=\$1200$ 时刻 $t_2=$ 从 8 月 1 日到 11 月 1 日 $=3$ 个月

$$r=\frac{E-[(B+D)-W]}{Bt+D(t-t_1)-W(t-t_2)}$$

$$=\frac{3100-[(3250+750)-1200]}{3250\times 9+750\times 7-1200\times 3}=\frac{300}{30900}=0.0097$$

这就是月利率, 能转换为如下年利率:

$$0.0097\times 12=11.6\%$$

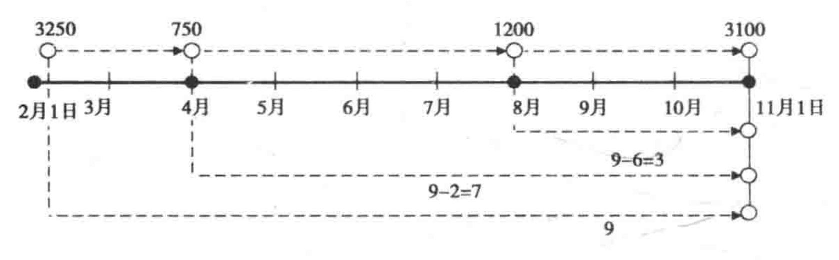


图 E1-14-1

第2章　银行贴现

当贷方从借方预先收取到期利息，并且此刻贷款额被完成，那么已经付出的利息就被称为**贴现**. 贷方实际上从贷款额度中直接扣减利息额，只给借方贷款钱数的余额，这就被称为**实收款项**. 类似于利息率，收取贴现的比率被称为**贴现率**，而且贷款期限被称为**贴现期限**. 除去利息率和贴现率的一个关键差异，即它们所基于的价值不同，贴现率和利息率的过程和元素都是完全相同的. 利息率是基于现值的，而贴现率则是基于将来值的.

例：如果一笔1000美元的贷款，贴现率是10%，银行将扣减100美元的贴现(1000美元×0.10)，付给借方900美元作为实收款项. 因为借方将不得不归还1000美元，这1000美元将被视为900美元现值的一个将来值(FV). 贴现率是10%(100/1000)，并没有和利息率发生混淆，利息率基于实际所得，即实收款项或者现值(900美元)，因此利息率将等于11%(100/900).

和计算总利息的方法相类似：

$$I = \mathrm{CV} \cdot r \cdot n$$

总贴现(D)能够用如下公式得到：

$$D = \mathrm{FV} \cdot d \cdot n$$

其中D是总贴现(银行贴现)，FV是贷款的到期价值，d是贴现率，n是贴现期限. 因为贷方将从未来归还的贷款额度(FV)中扣减贴现量，借方将得到实收款项(C)，该款项可以用如下公式得到：

$$C = \mathrm{FV} - D$$

但是，当D等于$\mathrm{FV} \cdot d \cdot n$，

$$C = \mathrm{FV} - \mathrm{FV} \cdot d \cdot n$$

$$\boxed{C = \mathrm{FV}(1 - dn)}$$

2.1　用贴现公式求FV

恰如我们早期所做的一样，当实收款项、贴现率和贴现期限已知的时候，我们可以重新整理贴现公式去求将来值.

$$\boxed{\mathrm{FV} = \frac{C}{1 - dn}}$$

例2.1.1　Megan想从当地银行借款1500美元，期限1.5年，贴现率9.75%. Megan收到实收款项多少钱？作为一种贴现，银行将得到多少钱？

$$D = \mathrm{FV} \cdot d \cdot n = 1500(0.0975)(1.5) = 219.37 \quad 贴现$$

$$C = \mathrm{FV} - D = 1500 - 219.37 = 1289.63 \quad 贴现$$

例2.1.2　如果Megan需要得到1500美元的净值，她应该申请多少额度的贷款？

在这种情形下，1500 美元是实收款项，我们需要求出申请额度(到期价值或将来值).

$$\mathrm{FV}=\frac{C}{1-dn}=\frac{1500}{1-0.0975(1.5)}=1756.95$$

因为银行将有 256.95 美元的贴现，Megan 为了取得 1500 美元的净值，她将不得不申请 1756.95 美元.

2.2 求贴现期限和贴现率

考虑实收款项公式 $C=\mathrm{FV}(1-d\cdot n)$，在其余变量已定的条件下，我们能得到 n 和 d.

贴现率公式

$$\boxed{d=\frac{1-(C/\mathrm{FV})}{n}}$$

贴现期限公式

$$\boxed{n=\frac{1-(C/\mathrm{FV})}{d}}$$

例 2.2.1 一项 60 天、700 美元的贷款，如果借款人得到了 679 美元，贴现率将是多少?

$$d=\frac{1-(C/\mathrm{FV})}{n}=\frac{1-(679/700)}{(60/360)}=0.18 \quad 或者 \quad 18\%$$

例 2.2.2 Paul 有一笔 6%、1000 美元的贷款，他收到的实收款项是 985 美元，对 Paul 而言，贴现期限是多久?

$$n=\frac{1-(C/\mathrm{FV})}{d}=\frac{1-(985/1000)}{0.06}=0.25 \quad 或者 \quad 一年的\frac{1}{4}，即 90 天$$

2.3 简单贴现和银行贴现之间的差异

除了提前收取贴现额的程序差异之外，银行贴现与简单贴现相比有轻微的计算差异. 让我们来选取一个例子观察这种差异.

例 2.3.1 我们用简单贴现方法和银行贴现方法，来贴现 6 个月期限、9%贴现率的 5000 美元.

用简单贴现方法，我们得到

$$\mathrm{CV}=\frac{\mathrm{FV}}{1+rn}=\frac{\$5000}{1+0.09(6/12)}=\$4784.69$$

$$简单贴现=\$5000-\$4784.69=\$215.31$$

用银行贴现方法，我们得到

$$D=\mathrm{FV}\cdot d\cdot n=\$5000(0.09)\left(\frac{6}{12}\right)=\$225$$

$$C=\mathrm{FV}-D=\$5000-\$225=\$4775$$

$$银行贴现=\$5000-\$4775=\$225$$

所以，银行贴现与简单贴现相比产生了较大的贴现额(225 美元)，而简单贴现方法仅

产生 215.31 美元的贴现额．当我们使用相同的利息率 r 和贴现率 d 时，这个有明显差异的结果产生了．

现在，让我们把该例子中的逻辑逆转过来，并且尝试用银行贴现过程得到贴现率(d)，并且用简单贴现过程得到利息率(r)．

$$d = \frac{D}{\mathrm{FV} \cdot n} = \frac{\$225}{\$5000(6/12)} = 0.09 = 9\%$$

和

$$r = \frac{\$225}{\$4784.69(6/12)} = 0.094 = 9.4\%$$

因此，如果我们视两个过程的简单贴现相等的话，简单贴现过程的利息率大于银行贴现过程的利息率．由此，我们能得到如下结论：

1. 如果我们使用相同的利息率(r)和贴现率(d)，那么银行贴现方法(D_B)的简单贴现额将比简单方法(D_S)的简单贴现额要大：

$$\boxed{D_B > D_s \quad \text{如果} \quad r = d}$$

2. 如果我们对银行和简单方法两者使用相同的简单贴现，那么简单方法的利息率(r)将大于银行方法的贴现率(d)．

$$\boxed{r > d \quad \text{如果} \quad D_B = D_S}$$

在下一个章节，我们将把贴现率(d)和利息率(r)做一个比较．

2.4　利息率和贴现率的比较

如果一个借款人得以在利息率和贴现率之间选择，通过银行贴现率去借款比通过利息率去借款，将使借款人花费稍微多一些．对得以知道怎么比较这两个比率，这是一个重要的理由．

我们来看贴现率和利息率的两个公式：

$$C = \mathrm{FV}(1 - dn) \tag{1}$$

和

$$\mathrm{CV} = \frac{\mathrm{FV}}{1 + rn} \tag{2}$$

因为公式(1)中的实收款项代表了公式(2)中到期额度的现值，我们使这两项相等：

$$\mathrm{FV}(1 - dn) = \frac{\mathrm{FV}}{1 + rn} \tag{3}$$

用 FV 去除等式两端，得

$$1 - dn = \frac{1}{1 + rn} \tag{4}$$

上式也能改写为

$$\frac{1}{1 - dn} = 1 + rn \tag{5}$$

$$\frac{1}{1-dn}-1=rn$$

$$\frac{1-(1-dn)}{1-dn}=rn$$

$$\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+dn}{1-dn}=rn$$

$$\frac{dn}{1-dn}=rn$$

$$\boxed{\frac{d}{1-dn}=r} \quad \text{在贴现率项中的利息率}$$

为了得到 d 值，我们整理方程得

$$d\cdot\frac{1}{1-dn}=r$$

从(5)式中替换 $1/(1-dn)$

$$d(1+rn)=r$$

$$\boxed{d=\frac{r}{1+rn}} \quad \text{在利息率项中的贴现率}$$

例 2.4.1 如果一家银行贴现一张票据，贴现率为 3%，期限为 120 天，等价利息率将是多少？

$$r=\frac{d}{1-dn}=\frac{0.03}{1-0.03(120/360)}=0.02 \quad \text{或者} \quad 2\% \text{ 利息率}$$

例 2.4.2 Kathy 被提供了一份利息率为 9.6%的贷款，她计划 8 个月还款，但她好奇地想知道贴现率将是多少？

$$d=\frac{r}{1+rn}=\frac{0.096}{1+0.096(8/12)}=9\%$$

2.5 贴现一张本票

对利息率和贴现率一起发生作用最为普通的应用之一，就是兑现一张本票. 当持有一张本票的贷款人在本票到期日期之前需要一些现金的时候，他可以去银行用贴现率兑现本票. 在这种情形下，贴现不得不基于本票的到期价值予以估值，而本票的到期价值却基于初始贷款额(面值)而确定.

例 2.5.1 Michael 向 Brian 借款 14 750 美元，商定借款利率 7%，期限 90 天，并且他签发了一张产生效力的本票(见图 E2-5-1). 但是，仅仅 30 天后，因为一件意外事故，Brian 需要现金，他不能等到 Michael 还给他钱的那个时候. 他带着本票到了当地银行以 8.25%的贴现率贴现了这张本票. 银行将付给他多少现金？银行从这笔交易中将赚到多少钱？

$$\begin{aligned}FV&=CV(1+rn)=14\,750\left[1+0.07\left(\frac{90}{360}\right)\right]\\&=15\,008.13 \quad \text{到期价值}\end{aligned}$$

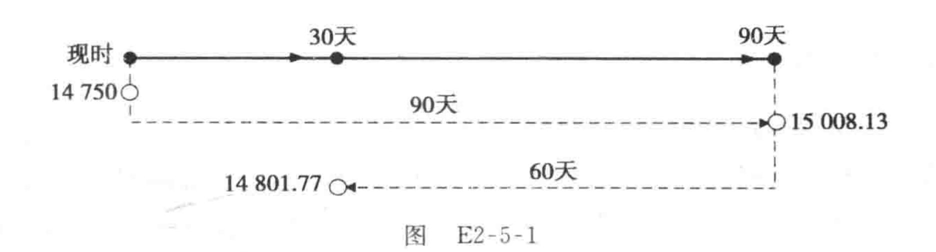


图 E2-5-1

$$C = \mathrm{FV}(1-dn) = 15\ 008.13\left[1-0.0825\left(\frac{60}{360}\right)\right]$$

$= 14\ 801.77$ Brian 以现金收到的数额

$15\ 008.13 - 14\ 801.77 = 206.36$ 银行收入的数额

注意到银行赚到的钱数正好就是 Brian 损失的钱数.

例 2.5.2 Sylvia 在 7 月 23 日签发了一张 7800 美元的本票，利息率是 6.25%，到期日是来年的 5 月 20 日(见图 E2-5-2). 在 11 月 15 日，这张本票的持票人出售本票给了他的银行，贴现率是 7.5%. (1)本票的持票人收到多少现金? (2)他借钱给 Sylvia，赚到钱了吗? (3)银行用贴现交易赚了多少?

看序列表，我们得到日期号:

7 月 23 日:204　5 月 20 日:140　11 月 15 日:319

到期期限:$(365-204)+140=161+140=301$



图 E2-5-2

利用银行家规则，到期价值将是

$$\mathrm{FV} = \mathrm{CV}(1+rn) = 7800\left[1+0.0625\left(\frac{301}{360}\right)\right] = 8207.60$$

贴现期限: $(365-319)+140=186$

$$C = \mathrm{FV}(1-dn) = 8207.60\left[1-0.075\left(\frac{186}{360}\right)\right]$$

$= 7889.55$ 实收款项;本票持有者收到的钱数

$8207.60 - 7889.55 = 318.05$ 银行将赚到的钱数

贷款人 7 月 23 日出借 Sylvia 7800 美元，最终 11 月 15 日回收 7889.55 美元，所以他在 115 天内赚到了 89.55 美元. 利息率是

$$r = \frac{1}{\mathrm{CV}\cdot n} = \frac{89.55}{7800(115/360)} = 0.036 \quad 或者 \quad 3.6\%$$

2.6 贴现短期国债

投资美国短期国债意味着，一个投资人为短期的将来得到更多，只需要现在付出较少的投资. 从金融的观点来看，联邦政府接受了期限在一年之内的将来值的贴现额度. 换句话说，政府出售票据给个人和机构投资者. 面额和到期期限由政府设计. 票据以面额 1000 美元、10 000 美元、15 000 美元、50 000 美元、100 000 美元和 1 000 000 美元来发行. 这些数额将是票据到期值或将来值. 到期期限按天计算，有 28 天、91 天、182 天和 364 天. 短期国债通常用公开拍卖销售，因为投资回报是投资人的付出数额和不远的将来得到数额二者之间的差值，一张短期国债技术上被认为是短期、无附息、可流转证券. 尽管用传统方法能得到贴现率，我们已经对这种传统方法有了深刻了解，但是可以发展一套公式在贴现期限和投标百分比已知时来计算得到贴现率.

让我们把竞价作为实收款项，因为它是一个百分数，实收款项的将来值将是 100 美元. 因此，

$$C = \mathrm{FV}(1 - dn)$$

$$B = 100\left[1 - d\left(\frac{n}{360}\right)\right] \quad 其中 \quad B = \mathrm{bid}\%$$

用 100 去除，

$$\frac{B}{100} = 1 - d\left(\frac{n}{360}\right)$$

整理，

$$d\left(\frac{n}{360}\right) = 1 - \frac{B}{100}$$

$$d\left(\frac{n}{360}\right) = \frac{100 - B}{100}$$

$$d = \frac{(100 - B)/100}{n/360}$$

$$d = \frac{100 - B}{100} \cdot \frac{360}{n}$$

用 100 去除，

$$d = \frac{100 - B}{1} \cdot \frac{3.60}{n} = \frac{3.6(100 - B)}{n} = \frac{360 - 3.6B}{n}$$

$$\boxed{d = \frac{360 - 3.6B}{n}}$$

例 2.6.1 一笔 182 天 15 000 美元的短期国债被以 95.350%竞价购买，求传统方法和使用 d 公式方法的贴现率.

用传统方法，贴现率(d)就是贴现数额(D)除以到期价值(FV)和到期期限(n)的乘积. 贴现数额就是到期价值(FV)和购买价格(CV)二者之间的差额，购买价格(CV)能通过用将来值(FV)乘以竞价百分数(bid%)而得到.

$$CV = B \cdot FV = 0.953\,50(15\,000) = 14\,302.50$$

$$D = FV - CV = 15\,000 - 14\,302.50 = 697.50$$

$$d = \frac{D}{FV \cdot n} = \frac{697.50}{15\,000(182/360)} = 0.092 \quad \text{或者} \quad 9.2\%$$

我们也可以使用 d 公式来计算：

$$d = \frac{360 - 3.6B}{n} = \frac{360 - 3.6(95.350)}{182} = 0.092 \quad \text{或者} \quad 9.2\%$$

例 2.6.2 3 月 3 日，Charles Tires 公司以 96.438 美元竞得 271 天短期国债 500 000 美元. 购买价格是多少？总贴现是多少？贴现率和利率期限二者的回报率是多少？

$$\text{购买价格} = CV = B \cdot FV = 0.964\,38(500\,000) = 482\,190$$

$$\text{总贴现 } D = FV - CV = 500\,000 - 482\,190 = 17\,810$$

$$d = \frac{D}{FV \cdot n} = \frac{17\,810}{5000\,000(271/360)} = 4.73\% \quad \text{贴现率}$$

并且

$$d = \frac{360 - 3.6B}{n} = \frac{360 - 3.6(96.438)}{271} = 4.73\% \quad \text{贴现率}$$

$$r = \frac{d}{1 - dn} = \frac{0.0473}{1 - 0.0473(271/360)} = 0.049 = 4.9\%$$

第3章 复　利

不像简单利率方法，只有本金才赚得利息，在复合利息方法中，本金和任何所得利息都能赚得利息. 这就是为什么复利被称为“利滚利”的原因. 让我们考虑一个例子，1000美元经历3年时间，用简单和复合两种方法赚得10%利息.

在简单方法中：

时间，n（年）	本金，CV（$）	利息，r（10%）$
1	$1000	100
2		100
3		100
	1000	300

$$FV = 1000 + 300 = 1300$$

在复合方法中：

时间，n（年）	本金，CV（$）	利息，r（10%）$
1	1000	100
2	1100	110
3	1210	121
	1331	331

$$FV = 1000 + 331 = 1331$$

表 3-1　单利和复利

CV= $100	n	r 5%	10%	15%	20%
		FV			
单利	10	150	200	250	300
复利		162.89	259.37	404.56	619.17
单利	20	200	300	400	500
复利		265.33	672.75	1636.65	3833.76
单利	30	250	400	550	700
复利		432.19	1744.94	6621.17	23 737.63
单利	40	300	500	700	900
复利		703.99	4525.92	26 786.35	14 697.15
单利	50	350	600	850	1100
复利		1146.74	11 739.08	108 365.74	810 043.82

所得利息倍乘就是由复合引发的激动人心累积背后的理由，这导致了复利方法被描述为一个“奇迹”.

在表 3-1 和图 3-1 及 3-2 中，我们能得到 100 美元以单利和复利，在四种不同的利率以及五种不同的到期期限条件下，是如何增长的. 我们能够看到，当 r 和 n 二者都增加的时候，单利累积的线性函数能用成比例的上升直线表示. 而复合累积的指数函数能用陡峭上行的曲线表示.

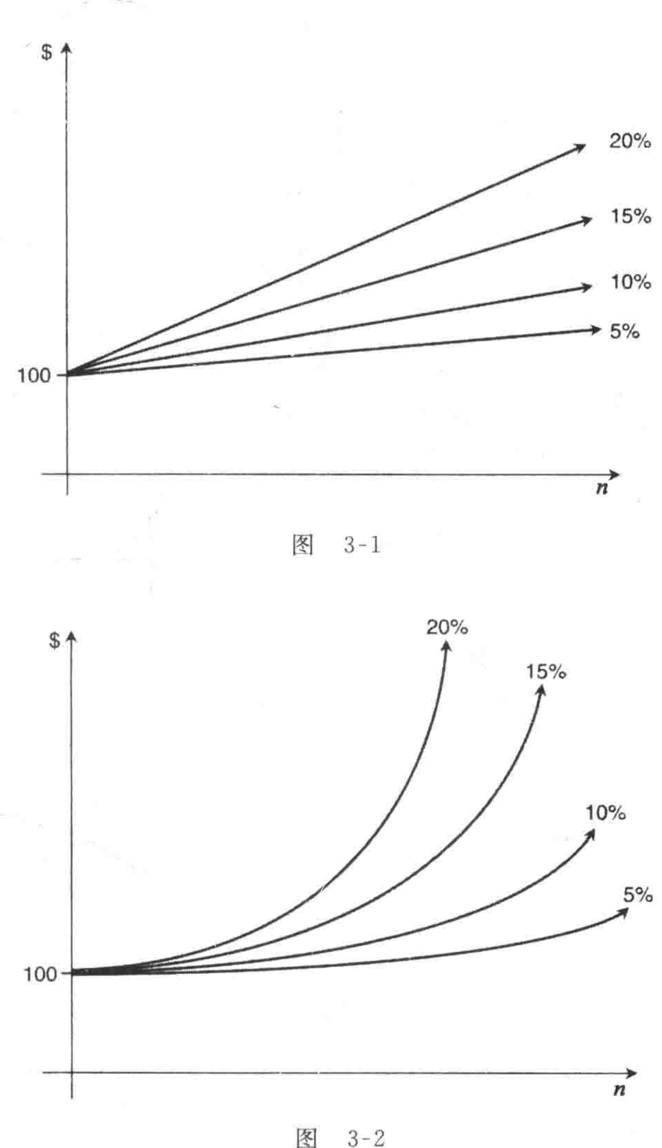


图 3-1

图 3-2

3.1 复合公式

让我们把对 1000 美元经过 3 年计算 10%复利的例子，转变为一个有期限的例子. 我们考虑将 1000 美元的额度作为现值(CV)，10%的复利作为 r，3 年到期期限作为 n，将来

值(FV)将根据下面事实来计算.

在第一年，现值 CV 将赚得 $r \cdot \mathrm{CV}$，将来值变成

$$\mathrm{FV}=\mathrm{CV}+r \cdot \mathrm{CV}$$

$$\mathrm{FV}=\mathrm{CV}(1+r) \tag{1}$$

在第二年，现值将是 $\mathrm{CV}(1+r)$，它将赚得 $r[\mathrm{CV}(1+r)]$. 因此，将来值为

$$\mathrm{FV}=\mathrm{CV}(1+r)+r[\mathrm{CV}(1+r)]$$

$$\mathrm{FV}=\mathrm{CV}(1+r)(1+r) \tag{2}$$

在第三年，现值将是 $\mathrm{CV}(1+r)(1+r)$，它将赚得 $r[\mathrm{CV}(1+r)(1+r)]$，将来值为

$$\mathrm{FV}=\mathrm{CV}(1+r)(1+r)+r[\mathrm{CV}(1+r)(1+r)]$$

$$\mathrm{FV}=\mathrm{CV}(1+r)(1+r)(1+r) \tag{3}$$

如果我们注意到，在第二年，等式(2)能改写为

$$\mathrm{FV}=\mathrm{CV}(1+r)^2$$

而且在第三年，等式(3)能改写为

$$\mathrm{FV}=\mathrm{CV}(1+r)^3$$

因此，我们能够推广到第 n 年，等式(n)能写成

$$\mathrm{FV}=\mathrm{CV}(1+r)^{n-1}+r\mathrm{CV}(1+r)^{n-1}$$

$$\mathrm{FV}=\mathrm{CV}(1+r)^{n-1}(1+r)$$

上述等式能写成

$$\mathrm{FV}=\mathrm{CV}(1+r)^{n-1+1}$$

最后，

$$\boxed{\mathrm{FV}=\mathrm{CV}(1+r)^n}$$

这就是单一数量(CV)复利计算的一般公式.

例 3.1.1 Heather 投资了 12 000 美元在一个年复利 7.333%的账户，期限是 5 年. 在 5 年末她预期收到多少钱？

$$\mathrm{FV}=\mathrm{CV}(1+r)^n=12\,000(1+0.07\,333)^5=17\,091.76$$

当 CV=100 美元的时候，可以把项 $(1+r)^n$ 计算为表格值. 这个表格值称为 s，并且能用于计算将来值的乘数，上面的公式能修正为

$$\boxed{\mathrm{FV}=\mathrm{CV} \cdot s}$$

例 3.1.2 使用表格方法，如果年复利率是 7.5%，计算一项额度为 930 美元、6 年期限的投资的将来值.

我们看附录的表 5，得到跨越 7.5%利率和 6 年期限的 s 值为 1.543 302：

$$\mathrm{FV}=\mathrm{CV} \cdot s=\$930(1.543\,302)=\$1435.27$$

这和我们使用公式计算的结果是相同的：

$$\mathrm{FV}=\mathrm{CV}(1+r)^n=\$930(1+0.075)^6=\$1435.27$$

3.2 求现值

就如同简单利率一样，在复利公式中的将来值可以贴现为现值. 也就是说，货币价值

能从将来带回到现在.

$$\boxed{CV = \frac{FV}{(1+r)^n}}$$

这个公式能够改写为

$$CV = \frac{1}{(1+r)^n} \cdot FV \tag{4}$$

或者

$$CV = FV(1+r)^{-n} \tag{5}$$

项 $1/(1+r)^n$ 或$(1+r)^{-n}$是一个被称为 v^n 的表格值(见附录表 6). 计算这个值基于 1 美元的当前值或现值. 因此，它被用于计算任何将来值的乘数. 于是，CV 公式可以改写为

$$\boxed{CV = FV \cdot v^n}$$

例 3.2.1 一笔 5000 美元在 4 年后被继承，给定年复合利率是 6.75%，如果该笔钱现在兑现，它将有多少?

$$CV = \frac{FV}{(1+r)^n} = \frac{5000}{(1+0.0675)^4} = 3850.33$$

例 3.2.2 利用附录中表 6，计算 2700 美元以 5.5%的利率、9 年期限的现值.

$$CV = FV \cdot v^n = \$2700(0.617\,629) = \$1667.60$$

用公式法检验这个结果，我们得到

$$CV = \frac{2700}{(1+0.055)^9} = \$1667.60$$

3.3 贴现因子

通过乘以某个贴现因子，将来值逻辑上能被贴现为现值，该贴现因子由利率和将来值被从将来拉回到现在时刻的时间期限二者所确定. 我们能利用等式(4)中的现值公式格式来指出贴现因子：

$$CF = FV \cdot \frac{1}{(1+r)^n}$$

将来值的因子 $1/(1+r)^n$ 就是贴现因子.

$$DF = \frac{1}{(1+r)^n}$$

我们能明显地看到，现值是如何依赖贴现因子变化的，而贴现因子依次依赖 r 和 n 两者波动. 在例子 3.2.1 中，$DF=1/(1+0.0675)^4=0.77$. 因此，CV 能用下式得到：

$$CV = FV \cdot DF = 5000(0.77) = 3850$$

例 3.3.1 接下来，我们看例 3.2.1 中的继承价值，如果它在如下条件被兑现(见图 E3-3-1)：

(a) 利率上升到 8%，但是时间保持相同.

(b) 时间延长到6年，但是利率保持相同.

(c) 利率上升到8%，但是时间延长到6年.

我们根据给定变化调节贴现因子：

(a)
$$\mathrm{DF}=\frac{1}{(1+0.08)^{4}}=0.735$$
$$\mathrm{CV}=\mathrm{DF}\cdot\mathrm{FV}=0.735(5000)=3675$$

注意到当我们增加利率(r)时，贴现因子变小，现值也减小.

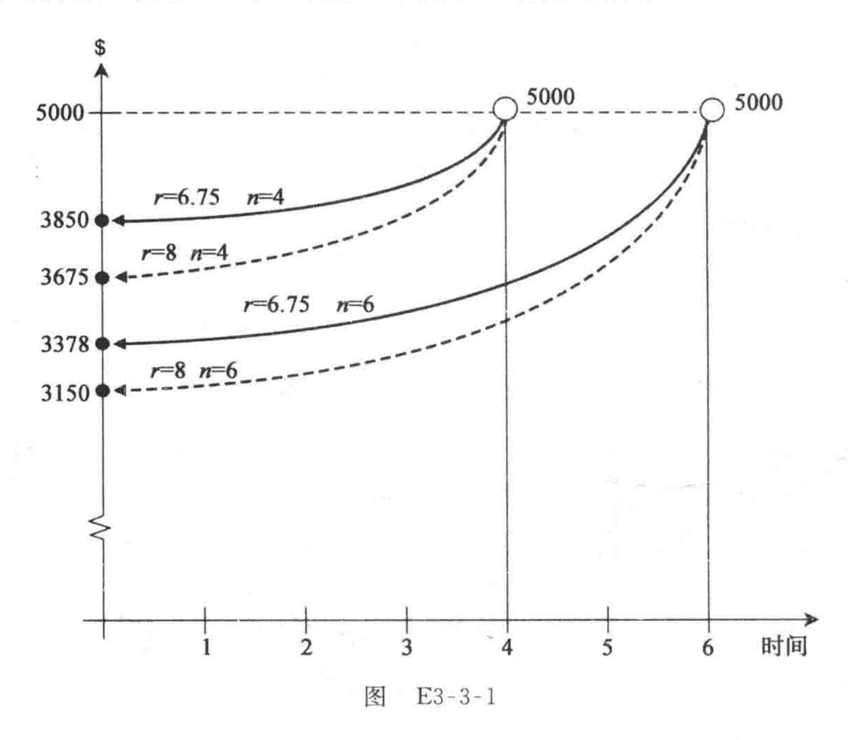


图 E3-3-1

(b)
$$\mathrm{DF}=\frac{1}{(1+0.0675)^{6}}=0.676$$
$$\mathrm{CV}=0.676(5000)=3.378$$

这里，当我们延长时间的时候，贴现因子也变小，现值亦减少.

(c)
$$\mathrm{DF}=\frac{1}{(1+0.08)^{6}}=0.63$$
$$\mathrm{CV}=0.63(5000)=3150$$

我们能够得出这样的结论：贴现值(CV)肯定随贴现因子(DF)而变化，它和利率(r)以及贴现期限(n)都存在负相关的关系.

3.4 求复合利息率

复合利息率能通过复合公式中所有其他剩余因子FV、CV和n的项得到.

$$r=\sqrt[n]{\frac{\mathrm{FV}}{\mathrm{CV}}}-1$$

例 3.4.1 如果你想在 5 年后买一辆 15 485 美元的车，而且你想用现有的 7700 美元开始投资，利率应该是多少？

$$r=\sqrt[n]{\frac{\mathrm{FV}}{\mathrm{CV}}}-1=\sqrt[5]{\frac{15\ 485}{7700}}-1=15\%$$

3.5 求复合期限

期限(n)也能在所有其余复合因子的关系中得到.

$$\boxed{n=\frac{\ln(\mathrm{FV}/\mathrm{CV})}{\ln(1+r)}}$$

例 3.5.1 如果你以年利率 9.375%投资 6777 美元，收到 13 000 美元将花多久时间？

$$n=\frac{\ln(\mathrm{FV}/\mathrm{CV})}{\ln(1+r)}=\frac{\ln(13\ 000/6777)}{\ln(1+0.093\ 75)}=7.27\quad 年$$

3.6 72 定律和其他定律

上述到期公式几乎能精确地估计本金值增长到任意将来值所要求的期限. 可是，如果一个一般的近似值需要找时间期限，该期限要求本金和在某多重期限条件下增长，那么存在较简单的公式. 在这种考量下，最通常的规律就是 72 定律. 这个定律在给定利率(r)的前提下，去估计本金额将实现翻倍的年数(n).

$$\boxed{n=\frac{72}{r}}\qquad 对于\ 2\mathrm{CV}$$

因为本金翻倍，就意味着我们得到 2CV. 类似地，数学家假设了 114 定律来估计 3 倍本金(得到 3CV)所要求的年数，以及 167 定律是为了让本金增长 5 倍(得到 5CV)，利率都是给定的.

$$\boxed{n=\frac{114}{r}}\qquad 对于\ 3\mathrm{CV}$$

和

$$\boxed{n=\frac{167}{r}}\qquad 对于\ 5\mathrm{CV}$$

例 3.6.1 在某时刻利率是 10%，让本金和翻倍将花 7.2 年，让本金和翻三倍要花 11.4 年，让本金和翻五倍要花 16.7 年.

$$\frac{72}{10}=7.2\qquad\frac{114}{10}=11.4\qquad\frac{167}{10}=16.7$$

请注意，利率常被当做一个整数，不用百分数的格式.

数学上，要是我们能把任意因子分解成乘积，就可以对任意因子增长的投资额所要求的期限进行近似估计，分解成的乘积将和上述三个定律有关系，也和计算公式分子总合计的规则有关系.

例 3.6.2 如果利率是 12%，一项投资额增长 30 倍，将要花费多久时间？

首先，我们把 30 分解成与我们的定律相关的因子：

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

因此，

$$n = \frac{\text{增长 2 倍} + \text{增长 3 倍} + \text{增长 5 倍}}{r}$$

$$= \frac{72 + 114 + 167}{12} = \frac{353}{12} = 29.4 \quad \text{年}$$

例 3.6.3　给定利率为 8.5%，一笔本金用因子 12 增长，它将要花费多少年？

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

$$n = \frac{72 + 72 + 114}{8.5} = \frac{258}{8.5} = 30.3 \quad \text{年}$$

3.7　有效利率

在所有金融交易和文献中阐述的利率，通常是名义利率，也可能被称为**年百分比利率**(APR). 然而，复合过程的频繁使对利率额的评估上产生了差异. 进行复合越频繁，利息将越累积. 因此，在更加精确地评估利率上，**变换期**变得愈加重要. 变换期就是相邻两次利息计算之间的时间. 它是复合过程中时间的基本单位. 最著名的变换期是：

1：年度复利

2：半年复利

4：季度复利

12：月度复利

52：周复利

365：日复利

有效利率就是使用在复合过程中的变换期得到的利率. 如果我们用 m 表示变换期，就能利用下面的公式对任意报价利率、名义利率(r)计算有效利率(R)：

$$\boxed{R = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1}$$

例 3.7.1　如果规定名义利率是 6%(见表 E3-7-1)，复利以年、半年、季度、月度、周和日发生，相应的有效利率将是多少？

$$\text{年}: R = \left(1 + \frac{0.06}{1}\right)^1 - 1 = 0.06 \text{ 或 } 6\%$$

$$\text{半年}: R = \left(1 + \frac{0.06}{2}\right)^2 - 1 = 0.0609 \text{ 或 } 6.09\%$$

$$\text{季度}: R = \left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^4 - 1 = 0.061\,363\,6 \text{ 或 } 6.136\%$$

$$\text{月度}: R = \left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{12} - 1 = 0.061\,677\,8 \text{ 或 } 6.168\%$$

$$\text{周}: R = \left(1 + \frac{0.06}{52}\right)^{52} - 1 = 0.061\,778\,2 \text{ 或 } 6.178\%$$

$$日:R=\left(1+\frac{0.06}{365}\right)^{365}-1=0.061\,838\,3 \text{ 或 } 6.184\%$$

表 E3-7-1

名义利率 r	复利周期	变换期 m	有效利率 $R(\%)$
6%	年	1	6
	半年	2	6.09
	季度	4	6.136 36
	月度	12	6.167 78
	周	52	6.177 82
	天	365	6.183 83

3.8 复合的类型

下面的例子说明如何能根据使用的变换期调节复合过程. 基于所用的复合类型，利息收益率也将不同.

例 3.8.1 如果你以7.25%的利率投资1000美元3.5年，假设复利以年度、半年、季度、月度、周、日发生，你将累计多少钱?

$$年:FV=CV(1+r)^n=1000(1+0.0725)^{\frac{7}{2}}=1277.58$$

$$半年:FV=1000(1+0.036\,25)^7$$

$$=1283.07\begin{cases}半年利率=\dfrac{0.0725}{2}=0.036\,25\\ 半年期限=3.5\times 2=7\end{cases}$$

$$季度:FV=1000(1+0.018\,125)^{14}$$

$$=1285.92\begin{cases}季度利率=\dfrac{0.0725}{4}=0.018\,125\\ 季度期限=3.5\times 4=14\end{cases}$$

$$月度:FV=1000(1+0.006)^{42}$$

$$=1287.86\begin{cases}月度利率=\dfrac{0.0725}{12}=0.006\\ 月度期限=3.5\times 12=42\end{cases}$$

$$周:FV=1000(1+0.001\,39)^{182}$$

$$=1288.62\begin{cases}周利率=\dfrac{0.0725}{52}=0.001\,39\\ 周期限=3.5\times 52=182\end{cases}$$

$$日:FV=1000(1+0.001\,98)^{1277}$$

$$=1288.69\begin{cases}日利率=\dfrac{0.0725}{365}=0.000\,198\\ 日期限=3.5\times 365=1277\end{cases}$$

注意到，当变换期戏剧性增加的时候，所得总利息的差异变得越来越小，特别地在周日复利之间，没有显著性的差异了，这就是连续复利不是很重要的一个理由.

3.9 连续复利

我们已经看到从年复利的单周期到 365 日复利的更多变换期都能被实现. 我们也看到所得利息将连续地增加，但不是十分显著. 因此，我们可以猜想以比日更小的时间单位进行复利是可行的，即一分又一分或一秒又一秒. 因为利息增加将变得更加不显著，连续复利比实际更加理论化. 为了理解连续复利的概念，我们重返有效利率公式：

$$R=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}-1$$

改写公式如下：

$$R=\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/r}\right]^{r}-1$$

令$\frac{m}{r}=K$，所以$\frac{r}{m}$将是$\frac{1}{K}$.

$$R=\left[\left(1+\frac{1}{K}\right)^{K}\right]^{r}-1$$

现在，如果我们假设 K 增加到无穷，那么$\left(1+\frac{1}{K}\right)^{K}$的极限将趋向于 e 值，因为

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{K}\right)^{K}\right]^{r}-1$$

因此，

$$\boxed{R=\mathrm{e}^{r}-1}$$

这就是连续复利的时候有效利率的计算公式. 现在，我们可以使用有效利率 R 来替代复利公式中的 r 了.

$$\mathrm{FV}=\mathrm{CV}(1+R)^{n}=\mathrm{CV}(1+\mathrm{e}^{r}-1)^{n}=\mathrm{CV}(\mathrm{e}^{r})^{n}$$

因此，在连续复利下的将来值将是

$$\boxed{\mathrm{FV}=\mathrm{CV}\cdot\mathrm{e}^{rn}}$$

我们也能逆运算得到现值：

$$\boxed{\mathrm{CV}=\mathrm{FV}\cdot\mathrm{e}^{-rn}}$$

例 3.9.1 使用连续复利来求例 3.8.1 中的将来值.

$$\mathrm{FV}=1000\mathrm{e}^{0.0725(3.5)}=1000(2.718\,28)^{0.253\,75}=1288.85$$

例 3.9.2 一笔以利率 5.5%连续复利的基金，30 个月将升为 7250 美元，如果今天要兑现这笔钱，它将有多少?

$$\mathrm{CV}=\mathrm{FV}\cdot\mathrm{e}^{-rn}$$

$$= 7250(2.71828)^{-(0.055)(2.5)} \quad \left(其中\ n = \frac{30}{12} = 2.5\right) = 6318.62$$

3.10 复合利率价值方程

正如简单利率的做法一样，对最终的结算而言，许多用复利评估的债务和支付可能都需要被协调一致．在这里用价值等式相同的方法，选择一个合适的假定起息日，让债务和支付双方都达到平等一致．

例 3.10.1 Bill 借款 10 500 美元，该款项 2 年到期、执行 7.75％的复合月利率(见图 E3-10-1)．但是，8 个月他还款 3000 美元，15 个月还款 2500 美元，在到期日他还欠多少钱？

首先，我们计算原始借款的到期数额：

$$日利率 = \frac{0.0775}{12} = 0.0064$$

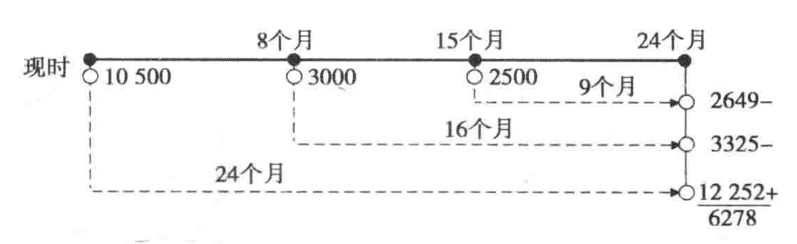


图 E3-10-1

$$FV = CV(1+r)^n = 10\,500(1+0.006\,45)^{24} = 12\,252$$

其次，我们把到期日作为假定起息日，两次还款到到期日的数额是

$$FV_1 = 3000(1+0.006\,45)^{16} = 3325$$

$$FV_1 = 2500(1+0.006\,45)^{9} = 2649$$

$$12\,252 - (3325 + 2649) = 6278$$

6278 美元就是 Bill 在两年末仍然要承担的还款数额．

例 3.10.2 一笔 993 715 的继承款在继承人之间如下分配(见图 E3-10-2)：

- 妻子将在 5 年后拿二分之一．
- 11 岁的儿子将在他 19 岁时拿四分之一．
- 7 岁的女儿将在她 19 岁时拿四分之一．

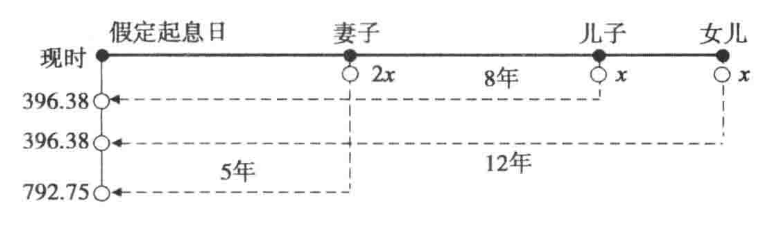


图 E3-10-2

如果基金以 6.5%的利率按季度复利投资，每个继承人将收获多少钱？

每个继承人的钱将在不同时间到期，求出答案最好的办法就是把所有份额从它们的到期日期带到当前日期，当前日期就是假定起息日：0.065/4=0.01625 为季度利率，4×5=20 是妻子的到期期限，4×8=32 是儿子的到期期限，4×12=48 是女儿的到期期限. 令继承款的四分之一为 X，因此二分之一将是 $2X$，存在被贴现为现值的将来值.

$$\mathrm{CV}=\frac{\mathrm{FV}}{(1+r)^n}\ \frac{2X}{(1+0.016\,25)^{20}}+\frac{X}{(1+0.016\,25)^{32}}$$

$$+\frac{X}{(1+0.016\,25)^{48}}=993\,715$$

$$\frac{12.56X}{5.01}=993\,715$$

对儿子和女儿而言　$X=396.38$

对妻子而言　$2X=396.38\times 2=792.76$

3.11　复利的等量时

恰如单利一样，我们这里可以对某个被称为等量日期的不同债务到期价值的总额予以补偿. 不同债务常常有不同的到期期限，但是我们能够计算等量时，等量时是等量日期和当前时刻之间时间的推广，其中当前时刻常常起假定起息日的作用.

例 3.11.1　一笔 10 000 美元的贷款以分期付款方式三次付清：2 年支付 2000 美元，4 年支付 5000 美元，5 年支付 3000 美元(见图 E3-11-1). 如果利率是 5%，若单一付款 10 000 美元借款人何时还清债务？

首先，我们必须贴现所有这些分期付款到当前时刻，该时刻将被作为假定起息日. 然后我们使所有贴现的分期付款和贴现的 10 000 美元相等，在价值等式中解出等量时 n.

$$\frac{2000}{(1+0.05)^2}+\frac{5000}{(1+0.05)^4}+\frac{3000}{(1+0.05)^5}=\frac{10\,000}{(1+0.05)^n}$$

$$\$1814+\$4113+\$2350=\$10\,000(1+0.05)^{-n}$$

$$\$8277=\$10\,000(1+0.05)^{-n}$$

$$\frac{\$8277}{\$10\,000}=(1+0.05)^{-n}$$

$$0.8277=(1+0.05)^{-n}$$

图　E3-11-1

现在，我们用附录表 6，可以查出 n 值.

$$\begin{array}{ccc} & \underline{n} & \underline{(1+0.5)^{-n}} \\ 3-4 & 3 & 0.8638 \\ n-4 & n & 0.8277 \\ & 4 & 0.8227 \end{array}$$

$0.8638-0.8227=0.0411$

$0.8277-0.8227=0.005$

$$\frac{n-4}{3-4}=\frac{0.005}{0.0411}$$

$$n-4=\frac{-0.005}{0.0411}=0.1216$$

$$n=0.1216+4=4.1216 \text{ 或 } 4 \text{ 年又 } 44 \text{ 天}$$

第4章 年 金

尽管年金这个词最初的意思是指年支付额，但是这个概念已经被推广到表示比简单年支付额更多的含义．年金就是在相等的时间间隔做对等支付的任意集合．在这种意义下，所有的周期性存款或者投资保证金，分期付款式购物，抵押贷款，汽车贷款，寿险保险费，甚至社会安全扣款都是年金类型．

4.1 年金的类型

年金根据三个标准来分类：支付时刻、年金期限和定时复合过程．下面的年金分类是基于支付时刻：

1. *普通年金*：在间隔期末支付的一种年金．如果是月度型的年金，就在每个月末支付．这类年金也被称为**延付年金**．
2. *期初应付年金*：在间隔期期初支付的一种年金．所以，如果是月度型的年金，支付被限定在每个月的开始．
3. *延期年金*：具有延迟期限的一种年金．在这种情形下，整个支付过程直到经过某个设计的时刻才开始．例如一笔负债，以某种对等支付设定在相等间隔末期，还清债务具有首次支付从现在起 3 年的期限，所以它就是一种具有 3 年延期的普通年金．

年金期限是第一次付款间隔开始和最后一次付款间隔结束之间的时间．例如，2009 年 1 月 1 日和 2011 年 12 月 31 日之间将是一个 3 年的期限．

下面的年金都是基于年金期限的分类：

1. *确定年金*：年金期限的开始和结束都是事先设计和确认好的．抵押贷款和汽车信贷都是确定年金的例子．
2. *或有年金*：年金的期限开始时是知道的，但是结束时依赖于某些偶然的事件．最好的例子就是人寿保险．保费支付起始于购买时刻，被保险人活着就保险继续，终止发生在被保险人死亡的时刻．
3. *永续年金*：年金的期限开始时是知道的，但是期限却是无限期的．例如某种保持不确定性投资的本金基金，连续产生不确定性的利息收入．

下面的年金是基于定时复合过程来分类的：

1. *简单年金*：年金复合发生在匹配支付时刻的时刻．例如，在每个季度末到期的年金利息将在每个季度末按季度复合．
2. *搁置年金*：年金的复合过程没有匹配支付间隔，所以评估的利息常常比支付的利息要么多要么少．例如一份季度年金，其利息是按月度复合的，故被称为**复杂年金**．

在金融世界中，普通年金和确定年金是我们今后关注的焦点．

4.2 普通年金的将来值

我们在上一章学习了正式复利公式[$FV=CV(1+r)^n$]，它被设计用于在某个时间点的

单个投资基金．当我们处理基金的集合或者定期存入一个账号的支付的时候，比如年金的情形，这个公式将不能发挥作用．接下来，我们描述对这种金融交易类型，如何才能得到其适当的公式．

令一种按季度支付的年金为A，并且假设到期期限为1年．首次支付将在第一季度末期到期，最后一次支付将在最后一个季度末期到期(见图4-1)．我们把这些支付的复合FV安排如下：

第一次：$FV=A(1+r)^3$

第二次：$FV=A(1+r)^2$

第三次：$FV=A(1+r)^1=A(1+r)$

第四次：$FV=A(1+r)^0=A$

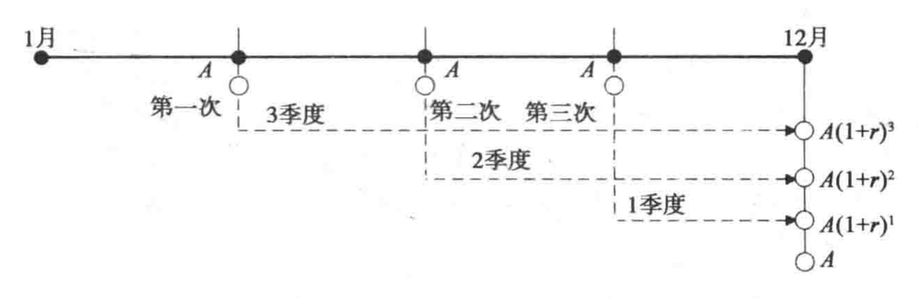


图 4-1

现在，让我们用任意其他的间隔数来替换四个季度，比如就用n，那么我们得到

第一次：$FV=A(1+r)^{n-1}$

第二次：$FV=A(1+r)^{n-2}$

……

倒数第二次：$FV=A(1+r)^2$

倒数第一次：$FV=A(1+r)^1$

最后一次：$FV=A$

将来值的总和就是

$$FV=A+A(1+r)+A(1+r)^2+\cdots+A(1+r)^{n-2}+A(1+r)^{n-1} \tag{1}$$

乘以$(1+r)$，我们得到

$$\begin{aligned}FV(1+r)=&A(1+r)+A(1+r)^2+A(1+r)^3\\&+\cdots+A(1+r)^{n-2+1}+A(1+r)^{n-1+1}\end{aligned} \tag{2}$$

如果我们用(1)减(2)，将得到

$$FV-FV(1+r)=A-A(1+r)^n$$

$$FV[1-(1+r)]=A[1-(1+r)^n]$$

$$FV(-r)=A[1-(1+r)^n]$$

$$FV=\frac{A[1-(1+r)^n]}{-r}$$

上式右端分子分母同乘以-1，得

$$\boxed{FV = \frac{A[(1+r)^n - 1]}{r}}$$

这就是普通年金将来值的计算公式.

例 4.2.1 Adam 在 25 岁时开始往他的退休账户每月贡献 100 美元. 如果年利息率为 6.25%，按照半年进行利率复合，当他在 65 岁年龄退休的时候，他将收到多少钱？他将从这项投资中赚多少钱？

他的年金是以半年计，即 600 美元(100×6)，他的年金也将以半年期限记账，即(65−25)×2=80，他的利息率为半年利率，即 0.0625/2=0.03125.

$$FV = \frac{A[(1+r)^n - 1]}{r} = \frac{600[(1+0.031\ 25)^{80} - 1]}{0.031\ 25} = 205\ 922$$

$$\text{贡献总额} = 1200 \times 40 = 48\ 000$$

$$\text{利息总额} = 205\ 922 - 48\ 000 = 157\ 922$$

例 4.2.2 Lori 想往一个账户每月存 150 美元，享受 4%的季度复合利率. 这是为了她 6 岁的儿子(当他 18 岁开始大学教育的时候，能兑现使用它). 儿子的教育基金将是多少？

A 是每季度存款，等于 150×3=450；r 是季度利率，等于 0.04/4=0.01；n 用季来度量，$n=(18-6)\times 4=48$.

$$FV = \frac{A[(1+r)^n - 1]}{r} = \frac{450[(1+0.01)^{48} - 1]}{0.01} = 27\ 550$$

上述将来值公式能够用表值改写(见附录表 7)，表值基于 1 美元年金额计算项$[(1+r)^n-1]/r$，称为 $S_{\overline{n}|r}$. 因此，将来值公式能被改写为

$$\boxed{FV = A \cdot S_{\overline{n}|r}}$$

例 4.2.3 用表值得到例 4.2.2 中将来值.

通过向上看利率 0.01 和项 48，我们可以从表中读出 $S_{\overline{48}|0.01}$ 值为 61.222 608.

$$FV = A \cdot S_{\overline{n}|r} = 450(61.222\ 608) = 27\ 550$$

4.3 普通年金的现值

通过对例子中季度性支付额实施逆运算去推导年金现值，我们能够得到贴现普通年金将来值的公式(见图 4-2). 根据公式 $CV=FV/(1+r)^n$，每次年金支付的贴现值将是

$$CV_4 = \frac{A}{(1+r)^4} + \frac{A}{(1+r)^3} + \frac{A}{(1+r)^2} + \frac{A}{(1+r)^1}$$

$$CV_4 = A(1+r)^{-4} + A(1+r)^{-3} + A(1+r)^{-2} + A(1+r)^{-1}$$

两边同乘以$(1+r)^4$：

$$CV_4(1+r)^4 = A(1+r)^{-4}(1+r)^4 + A(1+r)^{-3}(1+r)^4 + A(1+r)^{-2}(1+r)^4 + A(1+r)^{-1}(1+r)^4$$

$$CV_4(1+r)^4 = A + A(1+r) + A(1+r)^2 + A(1+r)^3$$

把所有的支付都当做将来值，用 FV 替换 A：

$$CV_4(1+r)^4 = FV + FV(1+r) + FV(1+r)^2 + FV(1+r)^3 = FV_{all}$$

对任意的支付次数，例如 n，我们可以把等式写为

$$\mathrm{CV}_n(1+r)^n=\mathrm{FV}$$

$$\mathrm{CV}_n=\frac{\mathrm{FV}}{(1+r)^n}$$

$$\mathrm{CV}_n=\frac{A[(1+r)^n-1]/r}{(1+r)^n}$$

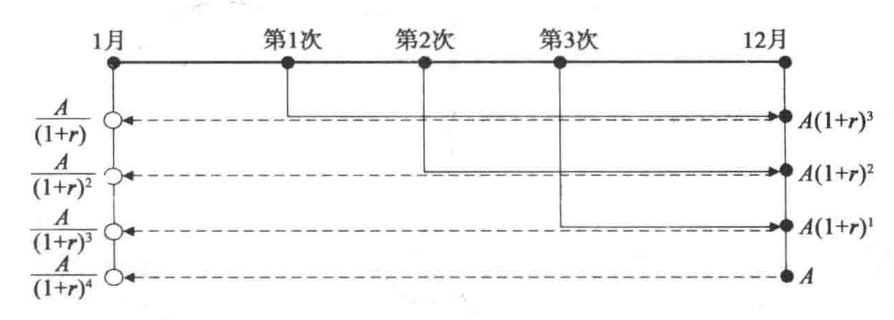


图 4-2

整理

$$\mathrm{CV}_n \text{ 或 } \mathrm{CV}_{\mathrm{all}} \text{ 或仅仅 } \mathrm{CV}=\frac{A[(1+r)^n-1](1+r)^{-n}}{r}$$

对所有支付现值(或贴现 FV)的公式是

$$\boxed{\mathrm{CV}=\frac{A[1-(1+r)^{-n}]}{r}}$$

例 4.3.1 一男子想兑现他的信托基金，该基金未来 10 年每月付给他 500 美元，基金利率是 6.5%，按月进行复合．他将收到多少钱？

月利率是 0.065/12=0.0054，按月期限是 10×12=120.

$$\mathrm{CV}=\frac{A[1-(1+r)^{-n}]}{r}=\frac{500[1-(1+0.0054)^{-120}]}{0.0054}=48\ 518.85$$

例 4.3.2 一项年金在每个季度末期包含 3750 美元可付款项，期限 7 年，按季度复合，利息率 8%，该年金现值多少？

按季度利息率是 0.08/4=0.02；季度期限：7×4=28.

$$\mathrm{CV}=\frac{A[1-(1+r)^{-n}]}{r}=\frac{3750[1-(1+0.02)^{-28}]}{0.02}=79\ 804.77$$

上述现值公式能够改写为表值的项(附录表 8)．现值基于 1 美元周期性支付来计算项 $\frac{[1-(1+r)^{-n}]}{r}$，记为 $a_{\overline{n}|r}$．因此，现值公式能被改写为

$$\boxed{\mathrm{CV}=A\cdot a_{\overline{n}|r}}$$

例 4.3.3 用表值求例子 4.3.2 中 CV.

看表 8，利息率 2%，期限 28，我们读出值(21.281 272)：

$$\mathrm{CV}=A\cdot a_{\overline{n}|r}=3750(21.281\ 272)=79\ 804.77$$

4.4　求普通年金的支付额

我们可以重新整理年金将来值和现值两者的公式，并且把它们改写为 A 的项.

• 当将来值 FV 给定的时候，年金支付额(A)：

$$\mathrm{FV}=\frac{A[(1+r)^n-1]}{r}$$

$$\boxed{A=\frac{\mathrm{FV}\cdot r}{(1+r)^n-1}}$$

• 当现值 CV 给定的时候，年金支付额(A)：

$$\boxed{A=\frac{\mathrm{CV}\cdot r}{1-(1+r)^{-n}}}$$

例 4.4.1　Samantha 正计划从现在起到她毕业 5 年买一辆价值 17 000 元的新车．她正在投资一种普通年金账户，其支付 7%的按月复合的利率．她应该每月存多少钱？

因为将来值 17 000 美元已经给定，我们采用第一个公式．月利率 $r=0.07/12=0.005\ 83$，月期限是 $5\times12=60$ 月.

$$A=\frac{\mathrm{FV}\cdot r}{(1+r)^n-1}=\frac{17\ 000(0.005\ 83)}{(1+0.005\ 83)^{60}-1}=237.48/\text{月}$$

例 4.4.2　Jim 给他的存款账号存入了 18 000 美元，他计划未来 6 年设立一个自动按月付款给他的儿子．如果账户享有 8.5%的按季度复合利率，他的儿子在每个月末期将收到多少钱？

因为可用现值是 18 000 美元，我们采用第二个公式．季度利息率将是 $0.085/4=0.021\ 25$；按季度的期限$=6\times4=24$.

$$A=\frac{\mathrm{CV}\cdot r}{1-(1+r)^{-n}}$$

或

$$A=\frac{\mathrm{CV}}{[1-(1+r)^{-n}]/r}=\frac{18\ 000}{[1-(1+0.021\ 25)^{-24}/0.021\ 25]}$$
$$=965.21/\text{季度}$$

$$\frac{965.21}{3}=321.73\quad\text{即为所求每个月他儿子收到的钱数}$$

利用表方法，我们可以把年金支付公式改写为

$$\boxed{A=\mathrm{FV}\cdot\frac{1}{S_{\overline{n}|r}}}$$

并且因为 $1/S_{\overline{n}|r}=1/a_{\overline{n}|r}-r$，

$$\boxed{A=\mathrm{FV}\left(\frac{1}{a_{\overline{n}|r}}-r\right)}$$

当现值可用的时候，年金是

$$\boxed{A = \text{CV} \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|r}}}$$

其中

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|r}} = \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$$

例 4.4.3　如果利率是 8%，以季度复合，期限为 5 年，采用表方法确定 Samantha 每季度存款将是多少？

$r=0.08/4=0.02$；$n=5\times4=20$；查表得到 $1/a_{\overline{20}|0.02}=1/16.3514=0.061\ 157$.

$$\begin{aligned} A &= \text{FV}\left(\frac{1}{a_{\overline{n}|r}} - r\right) \\ &= 17\ 000\left(\frac{1}{16.3514} - 0.02\right) \\ &= 17\ 000(0.061\ 157 - 0.02) \\ &= 699.67 \quad \text{每季度存款} \end{aligned}$$

例 4.4.4　如果利率是 12%，以半年复合，期限 6 年，当半年支付的时候，确定 Jim 的儿子将收到多少？使用表方法.

$\text{CV}=18\ 000$；$r=0.12/2=0.06$；$n=6\times2=12$；表值 $1/a_{\overline{12}|0.06}=0.119\ 277$.

$$A = \text{CV} \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|r}} = 18\ 000 \cdot \frac{1}{a_{\overline{12}|0.06}} = 18\ 000(0.119\ 277) = 2147$$

4.5　求普通年金的期限

通过整理年金将来值的公式，可以求出年金的期限(n)：

$$\text{FV} = \frac{A[(1+r)^n - 1]}{r}$$

$$\text{FV} \cdot r = A[(1+r)^n - 1]$$

$$\frac{\text{FV} \cdot r}{A} = (1+r)^n - 1$$

$$\frac{\text{FV} \cdot r}{A} + 1 = (1+r)^n$$

$$\ln\left(\frac{\text{FV} \cdot r}{A} + 1\right) = n \ln(1+r)$$

$$\boxed{n = \frac{\ln[(\text{FV} \cdot r/A) + 1]}{\ln(1+r)}}$$

年金的期限(n)也可以通过整理年金的现值公式求出：

$$\text{CV} = \frac{A[1-(1+r)^{-n}]}{r}$$

$$\text{FV} \cdot r = \text{CV} \cdot r = A[1-(1+r)^{-n}]$$

$$\frac{\text{CV} \cdot r}{A} = 1 - (1+r)^{-n}$$

$$(1+r)^{-n}=1-\frac{\mathrm{CV}\cdot A}{A}$$

$$-n\ln(1+r)=\ln\left(1-\frac{\mathrm{CV}\cdot r}{A}\right)$$

$$\boxed{n=-\frac{\ln\left[1-\left(\frac{\mathrm{CV}\cdot r}{A}\right)\right]}{\ln(1+r)}}$$

例 4.5.1　一个小型商业主想买 60 000 美元的设备，他可以为他将来的购买行为每周存 500 美元．如果他的账户以 7.75%利率按季度复合，计算要花他多久时间？

按季度利率=0.0775/4=0.019 375．每周存入 500 美元，每季度存款(A)=500×13=6500 美元．

$$\begin{aligned}n&=\frac{\ln[(\mathrm{FV}\cdot r/A)+1]}{\ln(1+r)}\\&=\frac{\ln[(60\ 000)(0.019\ 375)/6500+1]}{\ln 1.019\ 375}\\&=\frac{\ln 1.1789}{\ln 1.0194}\\&=\frac{0.1646}{0.0192}\\&=8.6\quad\text{季度}\end{aligned}$$

例 4.5.2　Sev 把一笔 230 000 美元的奖励存入普通年金账户，利息率为 9.25%按月进行复合．她想每月取现金 5000 美元．求她将能取款多少月？

按月利率=0.0925/12=0.0077；每月取款=5000 美元．

$$\begin{aligned}n&=-\frac{\ln[1-(\mathrm{CV}\cdot r/A)]}{\ln(1+r)}\\&=-\frac{\ln[1-(230\ 000)(0.0077)/5000]}{\ln(1+0.0077)}\\&=-\frac{\ln 0.645\ 42}{\ln 1.0077}\\&=57\ \text{个月}\end{aligned}$$

4.6　求普通年金的利率

年金的将来值和现值公式二者都不能从数学角度解决利率 r 的实际价值．因此，求解 r 只能依赖表值和用插值方法．**线性插值**是通过对比较比例的使用，去计算位于两个已知值之间的一个未知值的方法．借助于最接近利率的上下表值，插值方法有助于推断未知年金利率．但是，使用插值之前，我们需要整理给定问题的信息，以便这些信息能和表中的信息相兼容，即把 n 和 r 表示成 1 美元年金支付的形式．实现这种整理的公式是

$$\boxed{\mathrm{FV}=A_{\overline{n}|r}}$$

FV 是年金将来值，和我们前面已经看到的一样，通过用适当的表值乘以年金支付得

到. 该表值可以通过每个 n 和 r 的集合读出来，符号 $\overline{n|}r$ 表示表值.

例 4.6.1 Wayne 为他儿子建立了一个有息基金，儿子一年四次收到 200 美元，分别在 3 月末、6 月末、9 月末和 12 月末，将连续进行 8 年，在 8 年末儿子将收到 8800 美元的总额，给定该基金按季度复合利率，多少利率将使其可能实现？

利用上面的公式，我们能找出目标表值：

$$\mathrm{FV} = A_{\overline{n|}r} \quad n = 8 \times 4 = 32$$

$$8800 = 200_{\overline{32|}r}$$

$$\frac{8800}{200} = \overline{32|}\,r$$

$$44 = \overline{32|}\,r$$

追踪 $n=32$，44 或接近 44 的表值能被搜寻到. 看附录表 7，我们看到接近 44 有两个表值，分别是 44.227 029 61，对应于 2%的利率，32 项；以及 43.307 935 63，对应于利率 1.875%，32 项. 通过线性插值比较这些值的集合，我们能找到相对于值 44 比较公平的利率.

	表值	利率 (%)	
44−43.30	43.307 935 63	$1\frac{7}{8}$	$r-1\frac{7}{8}$
	44	r	
44.22−43.30	44.227 029 61	2	$2-1\frac{7}{8}$

通过对称性和交叉相乘，我们能找出 r：

$$\frac{44 - 43.307\,935\,63}{44.227\,029\,61 - 43.307\,935\,63} = \frac{r - 1.875}{2 - 1.875}$$

$$r = \frac{1.809\,809\,259}{0.919\,093\,98}$$

$$r = 1.969\%$$

4.7 期初应付年金：将来值和现值

除支付发生在每个支付期限的期初而不是期末之外，期初应付年金与普通年金类似. 因此，期初应付年金的整个期限开始在首次支付的日期，终止在最后一次支付时间间隔的末期. 换句话说，在最后一次支付已经付清之后，一个支付间隔将终止. 保险费用和财产租赁都是典型的期初应付年金的例子. 作为支付时间改变的结果，将来值和现值也将发生变化. 期初应付年金公式将反映这种变化：

$$\boxed{\mathrm{FV}_d = \left[A\,\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right](1+r)}$$

例 4.7.1 Jack 和他的妻子为了有足够的预付定金买一套大房子，打算在将来 5 年中每个月的第一天，往他们的存款账号存入 550 美元. 如果他们的存款账户支付 7%的存款月利率，他们将集中多少支付能力？

月利率=0.07/12=0.005 83；$n=5\times12=60$.

$$FV_d = 550\left[\frac{(1+0.00583)^{60}-1}{0.00583}\right](1+0.00583) = 39\ 606$$

例 4.7.2　如果未来两年 Simon 每周开头在一个支付 2.5%复合周利率的账户存入 200 美元，在年末他将有多少钱？

周利率=0.025/52=0.000 96；$n=52\times2=104$.

$$FV_d = 2000\left[\frac{(1+0.00096)^{104}-1}{0.00096}\right](1+0.00096) = 21\ 920$$

利用下面的公式能够得到期初应付年金的现值：

$$\boxed{CV_d = \left[A\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right](1+r)}$$

例 4.7.3　对于一笔支付 5.75%按月复合利率的投资基金，如果在 3 年期间每月初存入 750 美元，期初应付年金的现值是多少？

月利率=0.0575/12=0.00479；$n=3\times12=36$.

$$CV_d = 750\left[\frac{1-(1+0.00479)^{-36}}{0.00479}\right](1+0.00479) = 24\ 864$$

期初应付年金现值和将来值也能改写成表值 $S_{\overline{n}|r}$ 和 $a_{\overline{n}|r}$ 项：

$$\boxed{FV_d = A\cdot S_{\overline{n}|r}\cdot(1+r)}$$

$$\boxed{CV_d = A\cdot a_{\overline{n}|r}\cdot(1+r)}$$

例 4.7.4　利用表方法，如果例子 4.7.1 中 Jack 和他的妻子在 5 年期限每年开始存 6600 美元，年利息率是 7%，求 Jack 和他的妻子的预付定金.

我们查阅附录表 7 中 $S_{\overline{n}|r}$ 值，7%利率和 5 年期限得到值 $S_{\overline{5}|0.07}=5.750\ 739$.

$$\begin{aligned}FV_d &= A\cdot S_{\overline{n}|r}\cdot(1+r) = A\cdot S_{\overline{5}|0.07}\cdot(1+0.07)\\ &= 6600(5.750\ 739)(1.07) = 40\ 612\end{aligned}$$

例 4.7.5　如果例 4.7.3 中期初应付年金利率是 6%，半年复合，5 年期间每年存款两次，存 4500 美元，使用附录表 8，求出该期初应付年金的现值.

利率 $r=0.06/2=0.003$；$n=5\times2=10$；$A=4500$.

$$\begin{aligned}CV_d &= A\cdot a_{\overline{n}|r}\cdot(1+r) = A\cdot a_{\overline{10}|0.03}\cdot(1.03)\\ &= 4500(8.530\ 203)(1.03) = 39\ 537\end{aligned}$$

4.8　求期初应付年金的支付额

就像普通年金支付额一样，可以通过将来值公式或者整理现值公式得到期初应付年金支付额，具体采用哪一个公式依赖于哪个公式是可行的. 如果将来值是给定的，支付公式是

$$\boxed{A_d = \frac{FV\cdot r}{(1+r)^{n+1}-(1+r)}}$$

如果现值是给定的，支付公式将是

$$A_d = \frac{\text{CV} \cdot r}{(1+r)-(1+r)^{1-n}}$$

例 4.8.1 Sam 用电器商店卡购买了一套音响，他被告知具有商店 18%的月复合利率，在两年付款计划终止时他将付出 1744 美元．他在每个月初将付款多少？

因为将来值 1744 美元已知，我们应用带有将来值的 A_d 公式：

$$A_d = \frac{\text{FV} \cdot r}{(1+r)^{n+1}-(1+r)}$$

月利率 $r=0.18/12=0.015$；$n=2\times 12=24$.

$$A_d = \frac{1744(0.015)}{(1+0.015)^{25}-(1+0.015)} = 60$$

例 4.8.2 在例 4.8.1 中音响的现金价格将是什么？Sam 将支付多少总利息？年百分比率将是多少？

$$\text{CV}_d = A\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right](1+r)$$

$$= 60\left[\frac{1-(1+0.015)^{-24}}{0.015}\right](1+0.015) = \$1220 \quad \text{现金价格}$$

$$\text{两年付出总利息} = 1744-1220 = 524$$

$$\text{每年支付利息} = 524/2 = 262$$

$$\text{年百分比率} = \frac{262}{1220} = 21.47\%$$

例 4.8.3 如果 Sam 选择另外一家品牌，价格是 1500 美元，该按月支付多少钱？

因为我们知道现值为 1500 美元，我们将用现值的 A_d 公式：

$$A_d = \frac{\text{CV} \cdot r}{(1+r)-(1+r)^{1-n}} = \frac{1500(0.015)}{(1+0.015)-(1+0.015)^{1-24}} = 74$$

Sam 将在两年期间每个月初支付 74 美元.

4.9 求期初应付年金的期限

依赖于给定的将来值或现值，期初应付年金的期限 n 也能求出来．如果给定将来值，计算 n 的公式是

$$n = \frac{\ln\left[1+\frac{\text{FV} \cdot r}{A(1+r)}\right]}{\ln(1+r)}$$

并且，如果给定现值，计算 n 的公式是

$$n = -\frac{\ln\left[1-\frac{\text{CV} \cdot r}{A(1+r)}\right]}{\ln(1+r)}$$

例 4.9.1 Tim 和 Cathy 为了他们的第一个家需要头期款 15 000 美元．如果他们能在一个利率 8.5%按月复合的账户中每个月初存入 600 美元，计算买一套房子将花他们多

久时间？

月利率 $r=0.085/12=0.007\ 083$.

$$n=\frac{\ln\left[1+\frac{\mathrm{FV}\cdot r}{A(1+r)}\right]}{\ln(1+r)}$$

$$n=\frac{\ln\left[1+\frac{(15\ 000)(0.007\ 083)}{(600)(1+0.007\ 083)}\right]}{\ln(1+0.007\ 083)}$$

$$n=\frac{\ln(1.176)}{\ln(1.007\ 083)}$$

$$n=22.95 \quad \text{或} \quad 23\text{ 个月}$$

例 4.9.2　如果 Tim 和 Cathy 想购买一套 180 000 美元的房子，利率 7%按年复合，要是他们在每个月初能支付 1500 美元银行抵押，求付清房款将花他们多少年？

月利率 $r=0.07/12=0.005\ 83$.

$$n=\frac{\ln\left[1-\frac{\mathrm{CV}\cdot r}{A(1+r)}\right]}{\ln(1+r)}$$

$$n=-\frac{\ln\left[1-\frac{(180\ 000)(0.005\ 83)}{(1500)(1+0.005\ 83)}\right]}{\ln(1+0.005\ 83)}$$

$$n=-\frac{\ln(0.3045)}{\ln(1.005\ 83)}$$

$$n=204.6 \quad \text{个月或约 17 年}$$

4.10　延期年金

除了还款在一个较后的时间之外，延期年金是一种普通年金．在这种情形中，根据财务合约某个时刻过后才发出首笔支付．这个时刻被称为**延迟周期**．此处要注意，因为所做支付和普通年金一样发生在每个支付期末，所计算延迟期时需要注意．例如，如果首笔支付发生在第 5 个支付周期，年金将被延迟四个支付周期，并且依据同样的逻辑，我们能够推断如果年金被延迟 7 个支付周期，其首次支付必然发生在第 8 个支付周期末期．图 4-3 中时间线显示了一个 10-支付年金直到第 5 个支付周期才有了一笔支付，结果导致了 4 个周期的延迟．如果计算这种年金的现值，我们通常必须把 15 个周期的将来值转回来，还要从 $n=15$ 的现值中减去 $n=5$ 的现值计算延迟的周期数．这种情形下，我们将有正确的 10 周期现值．

例 4.10.1　一笔延期年金从 2008 年 1 月到 2009 年 6 月共 18 个月期间，每个月支付 250 美元，如果首次支付是在 2008 年 4 月末，给定利率是 7%，按月复合(见图 E4-10-1)．确定该延期年金的现值．

因为首次支付发生在 2008 年 4 月末，有 1 月、2 月和 3 月共 3 个月的延迟．因为跳前了 3 个月，将来值将发生在 2009 年 9 月(或年金将被付清)，是在 2009 年 6 月原始日期 3

个月之后. 为了现值计算，把将来值从 2009 年 9 月带回到 2008 年 1 月，但这是 21 个周期，这就是为什么我们需要计算延迟周期的现值 CV 并且从整个现值 CV 减去它的原因. 因此，我们计算两个现值，第一个现值其中 n 等于正常年金期限的 18 个月加上延迟周期的 3 个月($n=18+3=21$)，第二个现值仅仅延迟的 n 等于 3. 那么，我们从第一个现值 CV 中减去第二个现值 CV，就得到 n 等于 18 的正确的 CV.

月利率 $r=0.07/12=0.005\ 83$.

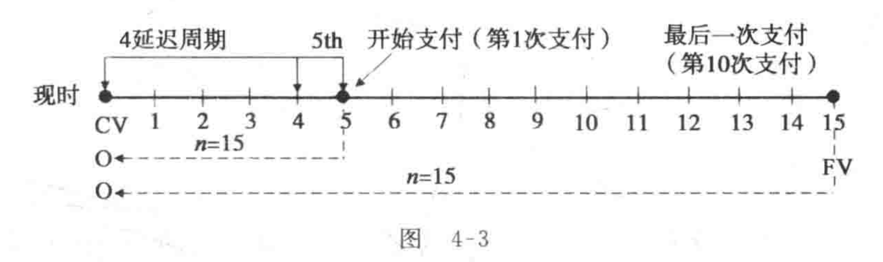


图 4-3

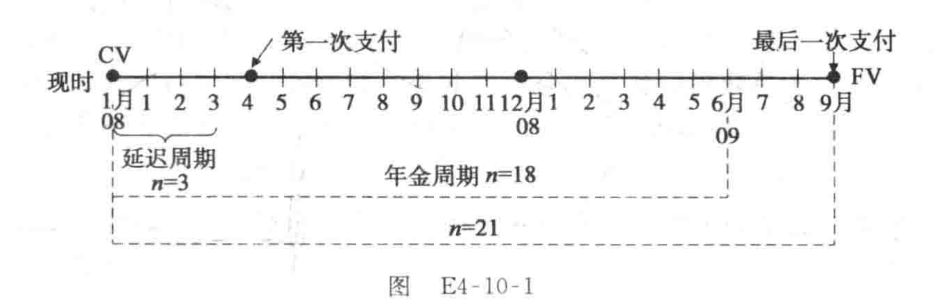


图 E4-10-1

$$\mathrm{CV}_1=\frac{A[1-(1+r)^{-n}]}{r}=\frac{250[1-(1+0.005\ 83)^{-21}]}{0.005\ 83}=4927.85$$

$$\mathrm{CV}_2=\frac{250[1-(1+0.005\ 83)^{-3}]}{0.005\ 83}=741.34$$

$$\mathrm{CV}=\mathrm{CV}_1-\mathrm{CV}_2=4927.85-741.34=4186.50$$

4.11 延期年金的将来值和现值

利用表值，我们能得到延迟年金的将来值($\mathrm{FV}_{\mathrm{def}}$)和现值($\mathrm{CV}_{\mathrm{def}}$)，该将来值和普通年金的将来值相同.

$$\boxed{\mathrm{FV}_{\mathrm{def}}=A\cdot S_{\overline{n}|r}}$$

例 4.11.1 一项 2 年期限按季度支付 500 美元的年金，首次支付发生在 6 个月末期，给定利率是 8%(见图 E4-11-1)，求该项年金的将来值.

季度利率 $r=0.08/4=0.02$；$n=8$；$A=500$ 美元 .

$$\mathrm{FV}_{\mathrm{def}}=A\cdot S_{\overline{n}|r}=500\cdot S_{\overline{8}|0.02}=500(8.582\ 969)=4291$$

延期年金现值公式($\mathrm{CV}_{\mathrm{def}}$)能写成

$$\boxed{\mathrm{CV}_{\mathrm{def}}=A\cdot a_{\overline{n}|r}(1+r)^{-d}}$$

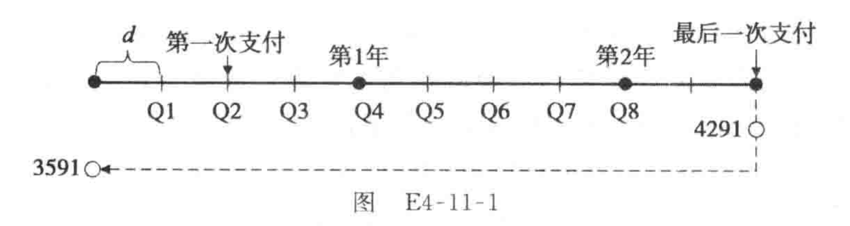


图 E4-11-1

其中 d 是延期期限.

例 4.11.2 计算例 4.11.1 中延期年金的现值.

$r=0.08/4=0.02$；$n=8$；$A=500$；$d=1$；$a_{\overline{8}|0.02}=7.325\ 481$.

$$CV_{def}=A\cdot a_{\overline{n}|r}(1+r)^{-d}=500(7.325\ 481)(1+0.02)^{-1}=3590.92$$

4.12 永续年金

永续年金是一种支付到永远的年金. 永续年金的期限是无穷的，因此只涉及永续年金的现值. 大多数永续年金都是为固定本金支付的利息流，该本金被持有在一个无期限账户. 捐赠账户、慈善基金和可撤销的优先股股息都是永续年金的例子. 永续年金的初始本金将是现值(CV)，本金获得的利息将是永续年金支付(A)，利率(r)将和所有年金一样是复合利率. 永续年金的期限(n)将等于∞. 所支付定期利率的计算由下面公式决定：

$$\boxed{A=r\cdot CV_{\infty}}$$

从上述等式，我们也能得到利率(r)和现值(CV)的公式：

$$\boxed{r=\frac{A}{CV_{\infty}}}$$

$$\boxed{CV_{\infty}=\frac{A}{r}}$$

例 4.12.1 一位已故教授的妻子拿出 750 000 美金给系里，以他的名字设立一项新的奖学金. 系里以 10.75%年复合利率投资该捐资，求年奖学金的多少.

$CV=750\ 000$，$r=0.1075$.

$$A=r\cdot CV_{\infty}=0.1075(750\ 000)=80\ 625\quad \text{年奖学金}$$

例 4.12.2 一个家庭捐赠一部分财富给本地教堂，教堂投资在利率 8.666%半年复合的基金上. 如果教堂从那个基金每个月收到 2650 美元作为支付，求最初家庭捐赠给教堂的额度.

半年支付和半年利率分别是 $A=2650\times6=15\ 900$；$r=0.086\ 66/2=0.0433$.

$$CV_{\infty}=\frac{A}{r}=\frac{15\ 900}{0.0433}=367\ 205\quad \text{初始家庭捐赠}$$

例 4.12.3 一个男人希望无限期地给他选择的慈善机构每季度 150 美元. 为了这个目的，他在一家永续基金投入了 5000 美元. 要实现他的愿望，利率应该是多少？

季度利率

$$r=\frac{A}{CV}=\frac{150}{5000}=0.03$$

年度利率 $0.03\times4=0.12$ 或 12%.

单元二附录

小结

作为所有金融文献和计算中的一个概念，货币时间价值堪称中心，这是本书核心材料的第一个单元. 它是金融理论的基础，因此被视为本书剩余部分的服务单元. 绝大多数(即使不是全部)原始公式和计算方法以及本书后面用到的公式都详细列在这里了. 四大主要议题：单利、银行贴现、复利和年金一起构成了本单元的资料. 在第 1 章，我们详细分析了单利公式，并且展示了在单利公式中如何寻找四个元素之中的任意一个. 作为四个元素之一，现值被挑选出来解释了简单贴现方法，简单贴现方法是简单利息累积方法的逆过程. 用天来计算到期期限、普通利息和精确利息之间的差异，显示出和其余的方式得到的一样好；用例子和时间线图细化了价值和时间等式；计算了假定起息日和到期期限，用计息法和美国法两种方法解释了分批付款；最后，用例子解释了得到单利利率的美元加权方法. 给出时间线图作为直观教具简化的例子，并使之更加易于理解.

与安排在第 1 章讨论的简单贴现方法不同，另一种贴现方法得到将来数额的现值在第 2 章予以解释. 在银行贴现方法中，贷款银行评估贷款利息，但在给借款人发放贷款额度时马上扣除了利息. 被发放到借款人手中的数额被称为实收款项，借款总额被贴现为实收款项的比率被称为贴现率. 贴现公式类似于单利公式，还论证了公式中所有元素的求解，比较了利率和贴现率. 银行贴现最常用的两种方式是本票贴现和购买短期国债，也用几个例子予以解释. 最后，讲解了简单贴现和银行贴现的差异，并用实际例子做了解释.

在第 3 章，我们从单利技术转移到了复利，其包涵性更全面、覆盖性更广泛，而且应用级别更高. 复利流行甚广源于在累积受益方面的魔力. 人们把复利的标准数学公式视为金融理论的基石. 我们学习如何应用这个公式，学习如何巧妙地用它来得到四大元素，即将来值、现值、复合利率和到期期限. 把将来值沿时间倒回，将产生和简单利率情形一样的贴现值，但这次却有一个明显的技术性差异. 我们也学习了根据几个变换期变换复合频率的重要性，由此导致了在现实生活情况中计算和应用的几种复合的类型. 我们也解释了名义利率和实际利率是多么不同，并且学会了在两者之间如何来回地转换. 恰如单利的情况，当我们有了复合利率时学习了时间价值方程，这是金融中很重要很流行的主题. 最后但同样重要的话题就是知道到期期限，通过某些数字的简单公式得到初始资本金的某个倍数.

当一个人使用正常复合公式和年金公式的时候，可以注意到学生提问的频率很高. 通过了解诸如存款和支付这些金融交易的频率，就能得到问题的答案. 通常复合公式设计处理单个账户单次单笔金融交易的累积. 而年金公式设计处理多于一笔超过一个周期时间的

交易，比如周期性存款或者规律性间隔时间付款．这里复合将和设计的变换期一样作用多次，然而在通常复合公式中，考虑从交易开始到到期时刻的时间长度，复合过程将使用一次．在这种情形下，年金是一个周期交易的集合，包括在相等的时间间隔支付相等的额度．我们讨论了三种主要的年金类型：普通年金，交易发生在间隔周期的末期；期初应付年金，交易发生在间隔周期的初期；延期支付年金，属于普通年金的一种，但交易被延迟到其他时间．也以期限为基础讨论了年金，比如确定年金、或有年金和永续年金．对于普通、期初应付、延期支付这三种类型的年金，不仅提出了主要的公式，而且也加以了应用．将来值、现值、支付额、利率和到期期限都能在其他变量已知的情况下得到．除了公式方法，也可以运用表值来得到这些值．

和前面章节其他类型的数学问题一样，我们使用时间线图来说明交易的细节．我们把这种方法推荐给学生，作为一种既能罗列问题的信息，又能清楚地解决问题的方法．在概述问题图的基本理解方面，这将产生很多差异，特别是在年金问题中，有时候在一种类型和另一种类型之间唯一的差异就是支付时刻．

公式列表

单利

总利息

$$I = \mathrm{CV} \cdot r \cdot n$$

利率

$$r = \frac{I}{\mathrm{CV} \cdot n}$$

到期期限

$$n = \frac{I}{\mathrm{CV} \cdot r}$$

现值

$$\mathrm{CV} = \frac{I}{r \cdot n}$$

将来值

$$\mathrm{FV} = \mathrm{CV}(1 + rn)$$

当 FV 已知时，利率

$$r = \frac{\mathrm{FV}/\mathrm{CV} - 1}{n}$$

当 FV 已知时，到期期限

$$n = \frac{\mathrm{FV}/\mathrm{CV} - 1}{r}$$

名义利率

$$I_o = I_e\left(1 + \frac{1}{72}\right)$$

或 $I_o = 1.014 I_e$

实际利率

$$I_e = I_o\left(1 + \frac{1}{73}\right)$$

或 $I_e = \dfrac{I_o}{1.014}$

等值时

$$\bar{n} = \frac{\sum P_i n_i}{\sum P_i}$$

采用美元加权方法的利率

$$r = \frac{E - [(B + D) - W]}{B_t + D(t - t_1) - W(t - t_2)}$$

银行贴现

实收款项

$$C = \mathrm{FV}(1 - dn)$$

$$C = \mathrm{FV} - D$$

将来值

$$\mathrm{FV} = \frac{C}{1 - dn}$$

贴现期限

$$n = \frac{1 - (C/\mathrm{FV})}{d}$$

贴现率

$$d=\frac{1-(C/FV)}{n}$$

利率

$$r=\frac{d}{1-dn}$$

用利率项表示的贴现率

$$d=\frac{r}{1+rn}$$

用投标项表示的贴现率

$$d=\frac{360-3.6B}{n}$$

复利

将来值

$$FV=CV(1+r)^n$$

现值

$$CV=\frac{FV}{(1+r)^n}$$

贴现因子

$$DF=\frac{1}{(1+r)^n}$$

利率

$$r=\sqrt[n]{\frac{FV}{CV}}-1$$

到期期限

$$n=\frac{\ln(FV/CV)}{\ln(1+r)}$$

有效利率

$$R=\left(1+\frac{r}{m}\right)^m-1$$

连续复合—将来值

$$FV=CV\cdot e^{rn}$$

连续复合—现值

$$CV=FV\cdot e^{-rn}$$

72 规则

$$n=\frac{72}{r}$$

114 规则

$$n=\frac{114}{r}$$

167 规则

$$n=\frac{167}{r}$$

年金

普通年金的将来值

$$FV=\frac{A[(1+r)^n-1]}{r}$$

$$FV=A\cdot S_{\overline{n}|r}$$

普通年金的现值

$$CV=\frac{A[1-(1+r)^{-n}]}{r}$$

$$CV=A\cdot a_{\overline{n}|r}$$

普通年金的支付(FV 给定)

$$A=\frac{FV\cdot r}{[(1+r)^n-1]}$$

$$A=FV\cdot\frac{1}{S_{\overline{n}|r}}$$

$$A=FV\left(\frac{1}{a_{\overline{n}|r}}-r\right)$$

普通年金的支付(CV 给定)

$$A=\frac{CV\cdot r}{1-(1+r)^{-n}}$$

$$A=CV\cdot\frac{1}{a_{\overline{n}|r}}$$

普通年金期限

$$n=\frac{\ln[(FV\cdot r/A)+1]}{\ln(1+r)}$$

期初应付年金的将来值

$$FV_d=A\left[\frac{(1+r)^n-1}{r}\right](1+r)$$

$$FV_d=A\cdot S_{\overline{n}|r}\cdot(1+r)$$

期初应付年金的现值

$$CV_d=A\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right](1+r)$$

$$CV_d=A\cdot a_{\overline{n}|r}\cdot(1+r)$$

期初应付年金的支付(FV 已知)

$$A_d=\frac{FV\cdot r}{(1+r)^{n+1}-(1+r)}$$

期初应付年金的支付(CV 已知)

$$A_d = \frac{CV \cdot r}{(1+r)-(1+r)^{1-n}}$$

期初应付年金的期限(FV 已知)

$$n = \frac{\ln\{1+[FV \cdot r/A(1+r)]\}}{\ln(1+r)}$$

期初应付年金的期限(CV 已知)

$$n = \frac{\ln\{1-[CV \cdot r/A(1+r)]\}}{\ln(1+r)}$$

延期支付年金的将来值

$$FV_{def} = A \cdot S_{\overline{n}|r}$$

延期年金的现值

$$CV_{def} = A \cdot a_{\overline{n}|r}(1+r)^{-d}$$

永续年金

$$A = r \cdot CV_{\infty}$$

永续年金利率

$$r = \frac{A}{CV_{\infty}}$$

永续年金现值

$$CV_{\infty} = \frac{A}{r}$$

习题

单利

1. 一笔 2350 美元的贷款，单利率 7%借期 6 个月，利息是多少?
2. 一笔 5750 美元的贷款，以 5.25%的单利、在 1 年半的期限被冲抵，借款人将付出多少利息?
3. 3000 美元的借款花 2 年时间，如果总利息是 375 美元，单利率将是多少?
4. 在什么利率下，Janet 支出 4322 美元利息，就冲抵了 3.5 年期限 13 000 美元贷款?
5. 用 900 美元以 12%简单利率得到 486 美元，要花多久时间?
6. Jack 要花多少年才能付出 1090 美元总利息还清 5700 美元的债务? 该笔债务利率为 8.5%.
7. 当总利息是 516 美元时，求一笔利率 8%、期限 3 年贷款的本金.
8. 如果一笔利率 3.75%、4 年期限的贷款支付利息 1350 美元，其现值是多少?
9. 一笔利率 7.25%、5 年期限的贷款，如果借款人必须付出 11 500 美元总额，其现值是多少?
10. 如果你存入 600 美元在一家付 4.5%单利的银行，11 个月之后你将能收到多少?
11. 如果你想 4 年账户余额达到 8000 美元，而且你把钱存在一家支付 6.25%利率的银行，最初存入多少?
12. 如果你把 700 美元存入一家支付 11.5%单利的银行 6 年，求 700 美元将增加到多少钱?
13. Linda 在她已有账户存入 2500 美元，20 个月之后收到 2590 美元，对 Linda 来说利率是多少?
14. Michael 想让他的 3200 美元 3 年增长到 4500 美元，他有一个为存款支付单利的存款账户. 能帮助他达到目的的利率是多少?
15. 如果 Michael 的存款仅仅能得到 9.5%的利率，达到 4500 美元他需要要等待多久?
16. 假设 Michael 能够增加 300 美元到 3200 美元存款中，并且愿意等待 3 年 6 个月达到他得到 4500 美元的目的，什么利率将使他梦想成真?

17. 求 2010 年 10 月 2 日和 2011 年 6 月 15 日之间的精确时间和近似时间.
18. 使用银行家法则，求从 2010 年 9 月 2 日到 2011 年 6 月 15 日的简单利息额.
19. 用普通利率和精确利率，求 7%利率的 3000 美元 50 天的利息额.
20. Jennifer 欠 600 美元期限 9 个月，还欠利率加 6%的 1500 美元期限 3 个月. 她 11 个月单笔还款付清两笔债务，如果钱的价值是 5%，她应该支付多少?
21. 如果利率是 7.5%，某人什么时候单笔支付 3550 美元就能免除下面三笔债务：期限 30 天 550 美元、期限 45 天 1300 美元和期限 70 天 1700 美元?
22. 如果实际利息是 320.59 美元，名义利息是多少?
23. 名义利息是 117.50 美元，实际利息是多少?
24. 一项基金 7 月 15 日以 1550 美元开始，37 天后存入 730 美元，100 天后取出 250 美元，余额是 2211 美元，该基金的单利率是多少?
25. 使用美元加权方法，求下述交易的简单利率：
    (a) 3 月 15 日初始存款 312.50 美元；
    (b) 5 月 25 日另存 617.70 美元；
    (c) 6 月 17 日取款 115.20 美元；
    (d) 7 月 1 日存款 250.00 美元；
    (e) 10 月 8 日余额 1229 美元.

银行贴现

1. 求一笔 2300 美元、2 年期限、贴现率 4.9%的贷款的实收款项.
2. 一项 900 美元的贷款，用 75 美元来贴现，实收款项是多少?
3. 贴现 5 个月期限、9%单利率的 1250 美元，求简单贴现.
4. 如果 Gen 安排她 13%贴现率的 3700 美元债务在 90 天终止，银行贴现和实收款项是多少?
5. 如果收到 820.25 美元作为一笔 7 个月、利率 6%的实收款项，贷款额度是多少?
6. 当你借 120 天的 1850 美元时，如果你仅得 1803.75 美元，求贴现率.
7. 一笔 3.5 个月 3400 美元的贷款，Jimmy 收到 3308 美元的实收款项，求贴现率.
8. 一笔 2900 美元 11%贴现率的贷款，当银行收费 638 美元时，还清贷款要花多久?
9. 你的朋友借了贴现率 13%的 5600 美元，仅仅收到 5054 美元，贴现期限是多少?
10. 求期限 60 天 7.5%的贴现率的等价利率.
11. 如果一种票据 14%贴现期限 4 年，其等价利率是多少?
12. Tim 一笔 6 个月的贷款，出价利率 15.5%，但是他考虑了可比贴现率. 贴现率是多少?
13. Bryan 收到了一张 3000 美元借款的本票，期限 90 天单利 13%. 如果这张本票销售给银行，收取 11%的利息，Bryan 赚钱吗? 银行将赚多少?
14. 朋友买了 3500 美元商品，签了 120 天无息本票. 如果供应商出售本票给收 12%利息的银行，求实收款项. 如果商品花费了供应商 1600 美元，他赚了多少钱?
15. 一家当地公司以 89.56 美元投标 180 天美国短期债券 20 000 美元，购买价是多少? 总

贴现是多少？用利率和贴现期限表示的回报率是多少？

复利

1. 留在账户中的 2500 美元 4 年期间支付 7.5%的利率，计算：
   (a) 如果利率是单利，将增长到多少？
   (b) 如果利率是复利，将增长到多少？
   (c) 两个将来值的差是多少？
2. 计算一笔 10 000 美元、存期 6 年、复利 9.25%的存款账户的将来值.
3. 如果钱值 8.5%，求期限 5 年的 7950 美元的现值.
4. 当 Brook 出生时，他的父母亲为他在一个收益率 12.75%的投资账户存入一笔存款. 当他 22 岁从大学毕业的时候，他从账户提现得到 35 036 美元. 初始存款是多少？
5. 在第五个生日，Corenza 从爷爷奶奶那里收到了一件礼物. 它是一个开放式的投资账户，具有初始存款 5000 美元，她能在 25 岁时提现. 如果复利率是 14%，她将会得到多少钱？
6. Gen 感兴趣于看她的钱是如何增长的. 她的妈妈建议她取出储蓄罐中的钱，存入本地支付 8.5%季度复合利率的银行. 如果她在储蓄罐中取出 700 美元，10 年将增长到多少？
7. 10 年把 3500 美元变成 10 870 美元，复合利率将是多少？
8. 如果 Maria 想 5 年获得 16 750 美元，她有一种选择就是在一个按月复合的附息账户存入 5000 美元的初始额度，帮助她实现目标的利率是多少？
9. 如果 Sev 想比较一项基金的累积，该基金具有 2800 美元的初始价值、存在一个期限 3 年、13.75%的利率的账户，如果复利是(a)年；(b)半年；(c)季度；(d)月；(e)周；(f)日；(g)连续，累积价值是多少？
10. 如果货币值 18%的半年期限复合，11 450 美元累积到 29 545.88 美元，将花多少年？
11. 一项基金 CV=7000 美元，FV=10 866.80 美元，r=14.75%按月复合，求一项基金的以月为单位的到期期限.
12. Kevin 被告知他的贷款附息 12%利率. 复合期限是按月的，有效利息率是多少？
13. 如果名义利率是 5.5%周复合利率，求有效利率.
14. 如果复合利率是 10.5%，到期在 6 年末总额多少钱等价于到期在 10 年末的 2100 美元？
15. 如果 920 美元期限两年，考虑 7.25%的复合利率，求 10 个月末债务的等价额度和 30 个月末的等价额度.
16. 你的朋友想一次性付清两笔债务. 第一笔债务是 570 美元 8 个月到期，第二笔是 1380 美元 1.5 年到期. 如果给定复合利率 4.9%，她想 1 年末付清，单笔付款多少钱？
17. Charles 有一笔 9000 元的债务，以 6%的季度复合利率 1 年到期. 他已经做了两次支付：在他收到贷款后 3 个月支付了 1200 美元；第一次还款后 4 个月支付了 2570 美元. 在原始期限解除所有债务他还需要支付多少钱款？
18. Marty 计划分两期付款还清他 3500 美元债务，10 个月付款 1500 美元，15 个月付款 2000 美元. 如果他改变了想法要一次付清他的欠债，假如利率是 24%，那付款将是什

么时候？

19. 求一笔三次分期付款付清的贷款一次性支付后的期限 n. 这笔分期付款是 2 年 7000 美元、3 年 9000 美元和 4 年 4000 美元，考虑 5.5%的利率.
20. 如果利率是 10%，一家投资 4000 美元的基金增长到(a)8000 美元；(b)12 000 美元；(c)20 000 美元，分别将要花多久时间？
21. 如果利率是 4%，一项投资增长 36 倍将花费多少年？
22. 如果一位投资者计划使他的初始投资增值 50 倍，利率是 15.5%，投资者的计划何时才是可能的？

年金

1. 如果货币价值 7.5%，计算一项一年 4200 美元 6 年期限的普通年金的累积价值.
2. 求每月 600 美元、5 年期限、9%利率按月复合的现金流的将来值.
3. 如果 Gabe 每个季度末给他的存款基金存入 450 美元期限 6 年，要是货币价值 6.75%，第六年末他将能储蓄多少钱？
4. 如果 Brenda 在每个月末捐赠 630 美元到她的退休账户，该账户支付 8.75%半年复合利率，当她从捐赠开始 20 年后退休时，她将有多少钱？
5. 如果将来 10 年每个月末都必须付给某个组织 970 美元，现在如果利率是 12%，需要多少钱？
6. 如果利率是 14.25%按季度复合，一项普通年金 3 年内每月交付 1490 美元，求普通年金的贴现值.
7. 一项年金每半年末期付款 7500 美元在一个 11.5%按年复合的有息账户 10 年，年金现值是多少？
8. 一对夫妇想在三年内翻修他们的房子. 他们需要 27 000 美元，他们计划用按月支付的方式存款在一个账户，该账户按月复合利率为 8.5%，他们的月存款数将是多少？
9. Wayne 想为他的女儿建一个每月支付，他女儿在将来四年计划生活在另一个州. 他为她的自助银行支付存入 40 000 美元. 如果银行支付 7.25%按半年复合利率，她每月将收到多少钱？
10. Rosemary 向往买一幢价值 300 000 美元的房屋远眺阿尔卑斯山脉. 她能在一个支付 15%按月复合利率的账户每月存款 10 000 美元，等待将花去多久时间？
11. 一所本地大学收到一位男校友遗孀 500 000 美元捐赠，建立了每年 10 000 美元的奖学金. 如果大学把这份捐赠投资在一个付息 11.5%按季度复合的账户，这份捐赠将延续多少年？
12. 一家餐馆的老板想买新的 25 000 美元的厨房设备. 他愿意通过每周给一家基金存款 2000 美元为之付钱，该基金付 10%的按月复合利率. 存够整个数额他该等待多久？
13. 如果年金的将来值是 35 507.50 美元，按季度支付是 1750 美元期限 9 年，年金利率是多少？
14. 如果你给你的存款账户在每个月初存入 220 美元，存两年，并且你的账户有 6.25%的按月复合利率，你在两年末将存入多少钱？
15. 求每周 900 美元、1.5 年、利率 8%、按周复合的年金现值.
16. Kelly 将来四年每个月初存款 350 美元，如果她的存款账户附息 7.5%按季度复合，求

其将来存款.

17. 75 000 美元抵押被以 9%得到. 它应该 20 年内被支付. 求每个月初的支付额.
18. Kelly 是职业代理，他设立了自己的退休基金. 他计划将来 20 年每年存款 17 000 美元. 给定他的退休基金付息 11%利率按半年复合，他将能存多少退休金?
19. Jen 在不久的将来需要 20 000 美元，她在每个月初向一个按年复合付息 15%的账户存款 875 美元，何时才能实现 20 000 美元?
20. 某年金利率是 7%，从 3 个月后开始，按月支付 2615 美元，期限 3.5 年，求该年金的将来值.

单元三 Unit 3

债务和租赁

第 1 章　信用和贷款
第 2 章　抵押债券
第 3 章　租赁

第1章　信用和贷款

对企业和消费者而言，建立在他们之间的信用是经济健康发展的一种重要元素，只要信用得到良好管理，经济就能健康发展．信用协议和管理必须成为长期花钱和存钱计划的一部分，而且也能成为经济增长的一个确定因素．除非信用误入创造繁荣的错误之途，导致了有害的过度拓展，不然信用实际上能收获巨大的好处，诸如扩大当前消费、刺激银行存款、带来经济增长和确保经济稳健等．基本上，借贷既能增加今天的收入，也能扩大个人当前的购买力．然而，所有的借贷都会抑制将来的收入，而因为需要偿还债务和支付利息，这些收入将明显降低．这就意味着一个人将来的收入不大可能保持原有消费水平，除非收入增长到足以补偿所有的债务支付，以及诸如通货膨胀和个人需求方面的变化等其他变量．借债和储蓄的底线包含了今天或者明天多花一点还是少花一点的对抗结果．做出正确选择要求良好地理解信用是什么以及如何最好地管理债务．这里我们的焦点就是理解债务和借贷类型，支付的过程和计算，如何摊销债务，以及如何确定信用成本．

1.1　债务类型

一般来说，根据支付结构，债务被划分为两种主要类型：一次付清债务和分期偿付债务．

一次付清债务

一次付清债务也被称为**开放式债务**．这种类型包括：

1. 一次性支付债务，这里本金和利息在双方协商好的时间完成支付，实现账户的完全平衡．
2. 旋转和付费账户信用一族，比如信用卡、某种商业付费卡，像百货公司和加油公司的付费账户；也包括个人信用贷款、房屋净值贷款和服务信用．这种债务类型的支付要么是全部余额2～3%的最小支付，要么是超出通常最小支付的其他可选支付．

分期偿付债务

分期偿付债务也被称为**封闭式债务**．这是最普通类型的债务，因为联合摊销而众所周知．依据合同，一笔被摊销的债务就是一笔附加在所借钱上的任意付息债，在某个付款期限内，通常是按月在正常的时间间隔，付出一系列相等的款额．这可能是短期的(上限是一年)，如某些个人贷款和消费借债，也可能是中期的(上限是五年)，如汽车贷款、家庭改建计划、耐用消费品；或者是长期的，如抵押和商业贷款．

这里，我们聚焦于分摊过程的属性和动态，后面将聚焦于它的“姊妹”——偿债基金过程．但是，在此之前，让我们讨论生成和分解利率的问题，以及了解实际年百分率(APR)的问题．分期偿还的贷款最明显的特征之一，就是如何支付被分解为付清本金和付清利息的两个部分．

1.2　动态本利比

贷款偿还中的利息部分通常是根据利率(r)和到期时间(n)来决定，这里利率是单利或

者复利. 本金部分由支付额和任意时间间隔的利息两者的差来简单决定. 问题则是这些部分在贯穿整个一系列时间间隔时是否会保持相同, 以及它们如何相互关联. 一般来说, 当本金和利息不仅和自身相关而且也彼此相关的时候, 有两种办法处理本利比的动态问题.

水平方法

在水平方法中, 利息和本金二者的比例在整个期限内都保持相同, 结果它们相互之间的关系对整个期限都保持一致. 下面的例子充分说明了这种不变性和一致性的关系.

例 1.2.1 让我们考虑一笔 1600 美元、12%利率、1 年的贷款, 它被分解为 12 个月支付(PYT):

$$P = \$1600$$
$$I = P \cdot r \cdot t = \$1600(0.12)(1) = \$192$$
$$n = 12 \quad \text{支付的次数}$$
$$\text{PYT} = \frac{P+I}{n} = \frac{\$1600 + \$192}{12} = \$149.33$$

月支付(MP)被分解为月利息部分(MIP)和月本金部分(MPP).

$$\text{MIP} = \frac{I}{n} = \frac{\$192}{12} = \$16$$
$$\text{MPP} = \text{PYT} - \text{MIP} = \$149.33 - \$16 = \$133.33$$

表 E1-2-1 展示了 16 美元的 MIP 和 133.33 美元的 MPP 如何在整整 12 个月保持相同.

表 E1-2-1

PTY No.	PYT 分数	MIP		MPP		MP
1	$\frac{1}{12}$	16		133.33		149.33
2	$\frac{1}{12}$	16		133.33		149.33
3	$\frac{1}{12}$	16		133.33		149.33
4	$\frac{1}{12}$	16		133.33		149.33
5	$\frac{1}{12}$	16		133.33		149.33
6	$\frac{1}{12}$	16		133.33		149.33
7	$\frac{1}{12}$	16		133.33		149.33
8	$\frac{1}{12}$	16		133.33		149.33
9	$\frac{1}{12}$	16		133.33		149.33
10	$\frac{1}{12}$	16		133.33		149.33
11	$\frac{1}{12}$	16		133.33		149.33
12	$\frac{1}{12}$	16		133.37		149.37
	$\frac{12}{12}$	192	+	1600	=	1792

78 规则方法

在这种方法下，利息和本金比例是一种逆反的关系．当利息部分减少，本金部分增加贯穿于到期期限．每次支付的利息都由根据 78 规则计算的某个分数来决定．这个规则的得名由来是基于在一年期间按月支付的总数相加恰好是 1＋2＋3＋…＋12＝78．数字 78 作分数的分母，用于确定任意月份的利息部分．这个数也将基于支付总数的到期期限发生改变．例如，24 支付将产生 300 美元总数(1＋2＋3＋…＋24＝300)，36 支付将产生 666 美元总数(1＋2＋3＋…＋36＝666)，等等.

确定任意支付利息额度的分数是

$$\boxed{K_i = \frac{j}{D}} \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

分子(j)是按照逆序支付的次数．例如，在一笔 12 次支付的贷款中，首次支付的 j 是 12，第二次支付的 j 是 11，等等，直到最后一次支付 j 是 1. 分母对 12 次支付将是 78，对 24 次支付将是 300 美元，对 36 次支付将是 666 美元，等等．对任意次支付，可以快速且方便地得到数字总数的一般公式是

$$\boxed{D = \frac{n(n+1)}{2}}$$

其中 D 是分数值，n 是在整个期限时间支付的总次数，例如一年 12 次，两年 24 次，三年 36 次，等等．对五年期限来说，在 78 规则方法下分数值 D 将是

$$D = \frac{60(60+1)}{2} = 1830$$

利息能用适当的支付分数乘以总利息(I)得到．例如，在一笔 24 次支付的贷款中，在第四次支付的每月部分是

$$\text{MIP}_4 = \frac{21}{\$300}(I)$$

得到分子 21，和按逆序支付 4 的对应数为 21 是一样的.

1	2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
24	23	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

而且，分母 300 由公式计算得到.

$$D = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{24(24+1)}{2} = 300$$

例 1.2.2 让我们应用 78 规则方法去分解例 1.2.1 中利息和本金二者的每月支付(PYT).

$$\text{PYT} = \$149.33$$

例如，第六次支付将被分解成

$$\text{MIP}_6 = \frac{7}{78}(192) = \$17.23$$

$$\text{MPP}_6 = \$149.33 - \$17.23 = \$132.10$$

等等，对所有的支付和它们的分解都显示在了表 E1-2-2 中.

表 E1-2-2

PYT No. 5	PYT 分数	MIP	MPP	MP
1	12/78	29.54	119.79	149.33
2	11/78	27.08	122.25	149.33
3	10/78	24.62	124.71	149.33
4	9/78	22.15	127.18	149.33
5	8/78	19.69	129.64	149.33
6	**7/78**	**17.23**	**132.10**	**149.33**
7	6/78	14.77	134.56	149.33
8	5/78	12.31	137.02	149.33
9	4/78	9.85	139.48	149.33
10	3/78	7.38	141.95	149.33
11	2/78	4.92	144.41	149.33
12	1/78	2.46	146.91	149.37
	78/78	192	1600	1792

注意，第六次支付发生在一年期贷款中的顺序 7.

余额递减方法

在余额递减方法中，一笔贷款的利息被用于未清余额，这是因为扣减了本金部分，利息逐月减少. 这就是为什么贯穿于付清时间表，当本金部分表现出递增的图像的时候，余额和利息表现出递减的图像的原因. 在结束和最后一次支付，本金部分将达到最大值，利息部分将达到最小值，未偿余额将达到 0，即为贷款的总付清点.

1.3 提前付清

读者可能会问：如果所付利息是相同的，比如例 1.2.2 在两种方法下，用一种方法或者另外一种方法确定利息将会产生什么不同？答案是如果贷款在完全到期时付清，无论采用什么方法都不会产生差异. 然而，如果因为某种理由，借款人决定在某个时间点提前付清贷款，78 规则方法将使他比水平方法付出更多利息. 这是因为 78 规则方法用递减的方式支付利息，在支付的早期比晚期具有较高的利息付出.

例 1.3.1 让我们假设例 1.2.2 中贷款的借款人在仅仅做了四次支付之后决定还清整个贷款.

(a) 尚欠余额是多少？

(b) 用两种方法付出的总利息各是多少？

(c) 在两种方法之间所付利息差是多少？

在水平方法下：

(a) 尚欠余额将只有剩余本金，因为本金余额被付清后将没有利息产生. 在这种情形

下，8 次本金比例将产生尚欠余额：

$$\text{尚欠余额} = (\$133.33 \times 7) + \$133.37 = \$1064.37$$

(b) 所付总利息将是前四次支付已经付出的利息：

$$\text{所付利息} = \$16 \times 4 = \$64$$

在 78 规则方法下：因为本金比例相互不同，尚欠余额要么是所有余下八个本金比例的总和，要么是总的本金比例减去前四个支付比例，用后者容易得到：

(a) 尚欠余额＝$1600－($119.79＋$122.25＋$124.71＋$127.18)＝$1106.07

(b) 所付利息＝$29.54＋$27.08＋$24.62＋$22.15＝$103.39

(c) 利息差＝$103.39－$64＝$39.39

特别是在提前还清贷款的情形下，实施 78 规则方法会让借款人花费更多，但让贷款人回报更多.

在 78 规则方法下，当贷款被提前支付的时候，有另一条途径去找尚欠余额. 我们把总的支付次数(n)分成两个部分：已经支付的次数(N_p)和尚未支付的次数(N_u).

$$\boxed{N_u = n - N_p}$$

于是，在例 1.3.1 中，N_u 将是第 8 次支付(8＝12－4). 因为 78 规则分母由下式决定：

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

D_u 也能被确定：

$$\boxed{D_u = \frac{N_u(N_u+1)}{2}}$$

而且，将能得到被称为**退税因子**(RF)的剩余支付利息分数，即

$$\text{RF} = \frac{D_u}{D_n} = \frac{[N_u(N_u+1)]/2}{[n(n+1)]/2}$$

$$\boxed{\text{RF} = \frac{N_u(N_u+1)}{n(n+1)}}$$

不应该支付的剩余利息额被称为**折扣**(Rb)，其计算和由 RF 决定的总利息(I)的部分一样.

$$\boxed{\text{Rb} = \text{RF}(I)}$$

当一笔贷款被提前支付的时候，折扣部分的利息是从所有剩余支付总额(TN_u)除去应付的额度或尚欠余额(B_d)而得到.

$$\boxed{B_d = \text{TN}_u - \text{Rb}}$$

让我们把这种方法应用到例 1.2.2.

$$\text{RF} = \frac{N_u(N_u+1)}{n(n+1)} = \frac{8(8+1)}{12(12+1)} = 0.461\,54$$

$$\text{Rb} = \text{RF}(I) = 0.461\,54(192) = \$88.61$$

$$\text{TN}_u = \text{PYT}(N_u) = \$149.33(8) = \$1194.64$$

$$B_d = \mathrm{TN}_u - \mathrm{Rb} = \$1194.64 - \$88.61 = \$1106.03$$

$$I = \$103.39 + \$88.61 = \$192$$

某些金融体系对提前还清贷款征收一笔**提前还款罚金**的费用. 这笔费用实际结算为依据 78 规则的尚欠余额和借款人很大可能假设支付本金剩余部分的差.

在例 1.3.1 中，根据 78 规则尚欠部分是 1106.03 美元，借款人可能假设到期的恰好是本金的剩余部分，用水平方法计算为 1064.37 美元，41.66 美元（$1106.03－$1064.37）的差额就是提前还款罚金.

1.4 评估利息和构建支付

根据贷款的不同类型，可以用不同的方式评估利息和构建支付. 这一节我们讨论不同类型的贷款，以及如何计算利息和每期支付.

单一付款贷款

单一付款贷款的支付必须是包括本金和利息的全付，在双方共同约定的某个时间仅仅做一次支付. 这是简单和直接的，执行起来一点也不复杂，常常伴随着分解支付，计算利息的正确分数，或者处理计算正确的到期日期，等等. 作为简单和明确的结果，实际年度百分比利率(APR)将恰好匹配贷款的名义 APR 这种类型. 借款额(P)的总利息(I)将用标准方式确定：

$$I = P \cdot r \cdot t$$

其中 r 是利息率或所谓 APR，t 是到期时间. 付款额将简化为一次支付：

$$\boxed{\mathrm{PYT} = P + I}$$

例 1.4.1 Joe 从他的表亲借了 5000 美元为计算机实验室购买新设备. 他们协议在 Joe 收到资金两年后，所借款额需加 6.5%的利息全部付清. Joe 将偿还多少钱？

$$I = P \cdot r \cdot t = \$5000(0.065)(2) = \$650$$

$$\mathrm{PYT} = P + I = \$5000 + \$650 = \$5650$$

如果名义的 APR_s 是 6.5%，在这个例子中实际的 APR_a 是多少?

$$\mathrm{APR}_a = \frac{AI}{P}$$

其中 A 是年利息，P 是本金或初始借款额(5000 美元).

$$AI = \frac{I}{t} = \frac{\$650}{2} = \$325$$

$$\mathrm{APR}_a = \frac{\$325}{\$5000} = 0.065 \quad 或 \quad 6.5\%$$

这表明对一次付清贷款而言，名义 APR 和实际 APR 是相同的($\mathrm{APR}_s = \mathrm{APR}_a$). 但是，对其他类型的贷款而言，名义 APR 和实际 APR 可能不是相同的，比如像折扣贷款的情形，借款人收到的初始额度有别于名义本金，名义 APR 和实际 APR 就更不可能相同了.

例 1.4.2 在例 1.4.1 中，如果 Joe 从某家银行以贴现利率方法借款 5000 美元，总

利息 650 美元将被出借人事先扣除，所以 Joe 将收到 4350 美元（$5000－$650），那么实际的 APR 是

$$APR_a = \frac{\$325}{\$4350} = 0.075 \quad 或 \quad 7.5\%$$

并且可以确认在折扣贷款中，实际年百分率将大于名义百分率.

$$APR_a > APR_s$$

追加利息贷款

追加利息贷款使用了追加作为计算利息的方法，在许多商业银行和存贷款公司都很流行，它们构成了绝大多数消费金融分期付款贷款. 在这种贷款类型中，采用评估利率，并实行提前收费，实际上并非马上就收取. 利息的计算基于总的本金和贷款期限的整个长度. 整个利率是被附加到本金上，并且总额用到期期限分成了确定数额周期性支付，通常是按月支付的.

$$PYT = \frac{P+I}{n} \tag{1}$$

其中 PYT 是周期支付，P 是本金或者借款额，n 是用像月一样相等的时间间隔度量的到期时间，I 是总利息，被如下公式决定：

$$I = P \cdot r \cdot t \tag{2}$$

用 n 代替 t，(2)式将允许把(1)式修改为(3)：

$$PYT = \frac{P + P \cdot r \cdot n}{n}$$

$$\boxed{PYT = \frac{P(1+rn)}{n}} \tag{3}$$

例 1.4.3　基于追加利息，Emily 以 8.25%借款 6750 美元，期限 3 年. 确定其按季度支付额.

$P = \$6750$；$r = 0.0825/4 = 0.0206$；$n = 3 \times 4 = 12$.

$$PYT = \frac{P(1+rn)}{n} = \frac{\$6750[1+0.0206(12)]}{12} = \$701.72 \quad 每季度$$

贴现贷款

就和追加利息贷款一样，在贴现贷款之前评估利息，但和追加利息贷款相反，整个利息被立即从所求贷款额度中扣除，只给借款人剩余的本金. 然而，如同分期贷款，全部本金将用到期时间拆分成按月支付的形式. 这里把利率称为贴现率，用 d 来表示，总利息被称为总贴现，用 D 来表示，借款人实收额度用 P_0 来表示，或者称之为实收本金：

$$D = P \cdot d \cdot n$$

$$P_0 = P - D$$

$$P_0 = P - P \cdot d \cdot n$$

$$\boxed{P_0 = P(1-dn)}$$

$$\text{PYT} = \frac{P}{n}$$

所以，这是分期贷款唯一的类型，因为全部利息事先已经扣除，按月支付就构成了整个本金. 这里值得注意的是，所提到追加利息贷款和贴现贷款二者构成的假设，即对整个到期时间整个本金都是欠款的，然而现实表明，随着支付的进行本金得以逐渐减少，并且贴现贷款中借款人一开始使用的贷款是低于全部本金的. 在假设和实际之间的这种矛盾导致了这些方法中实际的 APR 不同于名义 APR 的事实. 下面我们给出两个公式用于估计实际年百分率(APR_a).

$$\boxed{\text{APR}_a^1 = \frac{2KI}{P(n+1)}} \quad \text{第一个公式}$$

这里 K 是一年之内的支付次数，I 是总利息，P 是本金或初始借款额度，n 是贯穿于到期期限总的支付次数.

例 1.4.4 为了计算例 1.4.3 中的实际年百分率，我们对 K 采用按四个季度支付，对 P 采用 6750 美元的混合总额，对 n 采用 3 年之内 12 个季度支付，对 I 采用 1670.62 美元的总利息，这可以用下式计算得到：

$$I = P \cdot r \cdot t = \$6750(0.0825)(3) = \$1670.62$$

$$\text{APR}_a^1 = \frac{2KI}{P(n+1)}$$

$$\text{APR}_a^1 = \frac{2(4)(\$1670.62)}{\$6750(12+1)} = 0.152 \quad \text{或} \quad 15.2\%$$

第二个用于计算实际年百分率(APR_a^2)的公式称为 **n-比率公式**：

$$\boxed{\text{APR}_a^2 = \frac{K(95n+9)I}{12n(n+1)(4P+I)}} \quad \text{第二个公式}$$

其中 K 是一年之内的支付次数，n 是整个支付期限内的支付总次数，P 是本金或借款额，I 是总利息.

例 1.4.5 把第二个公式应用到例 1.4.4 得到

$$\text{APR}_a^2 = \frac{4[95(12)+9]\$1670.62}{12(12)(12+1)[4(\$67\,750)+\$1670.62]} = 0.143 \quad \text{或} \quad 14.3\%$$

两个公式产生了不同的 APR 估计，但是二者得到的实际 APR 大于该笔贷款的名义 APR.

$$\text{APR}_a < \text{APR}_s$$

由此可知，追加利息方法高估了利息费用.

1.5 信贷费用

消费者和商家为贷款以及他们使用的信用卡和付费账户每年支付了数十亿美金. 两个主要因素决定了信用卡费用增长的力量：利率和保持未清余额的时间. 两个因素对付出两抵的利息总额都是正相关. 利息率越高、时间越长，借方支付的利息也就越高. 一个借款人能拿到贷款的明显昂贵行动，就是长时期在循环账户只保持最小支付额. 这种行动能增

加付清债务的时间到无限长，结果本质上将推动支付的利息额，特别是如果最小支付被设定在 2%的低水平，或者被设定为低于未偿本金. 信用卡和付费账户的行业标准是 2%～3%. 让我们通过例子来说明.

例 1.5.1 Jennifer 爱上一套完整的家庭娱乐系统，其售价为 3000 美金. 百货公司给用商店信用卡购买这套系统的顾客提供一个仅 60 美金的按月支付，这种操作听起来很容易. 给定商店对其缴费卡收取 20%的 APR，Jennifer 还清她的购买欠款要用多久？她最终将付出多少总利息？

根据商店的政策，60 美金是最小支付额，设定在未清余额的 2%.

$P=\$3000$；APR=20%，月利率=0.20/12.

60 美金的按月支付(PYT)将在一个月利息部分(MIP)和一个月本金部分(MPP)之间被分解.

$$\text{MIP}=\$3000\times\frac{0.20}{12}=\$50$$

$$\text{PYT}=\$60$$

$$\text{MPP}=\$60-\$50=\$10$$

$$\text{本金还清时间(PPT)}=\frac{P}{\text{MPP}}=\frac{3000}{10}=300\text{ 个月}=\frac{300}{12}=25\text{ 年}$$

$$\text{总利息支付}=\text{MIP}\cdot\text{PPT}=\$50\times300=\$15\,000$$

表 E1-5-1　总支付利息(I)和年付清期限(t)决定的 3000 美元分期支付成本

最小支付费用(%)	APR							
	5%		10%		15%		20%	
	t(年数)	I($)	t(年数)	I($)	t(年数)	I($)	t(年数)	I($)
2	12	685	15.3	1831	22	4185	43.6	12 126
3	8.75	443	10.2	1050	12	1937	15.25	3361
4	7	327	7.75	738	8.75	1271	10	1989
5	5.9	260	6.4	570	7	948	7.75	1418

采用这种缴付利息的方法，如果 Jennifer 只选择付出最小支付费用，为了付清 3000 美金的娱乐系统，她不但要花去 25 年的时间，而且要付出 15 000 美金的总利息. 事实上，现实将是更糟糕的！理由就是在上述的简单计算中，我们假设在 50 美金利息和 10 美金本金之间的分解在整个到期期限都保持了常数. 在现实中，分解变化了，导致了付清借款要追加更多的时间. 用金融计算工具的计算机运行付清时间表，表明实际的年分解系统将使付清时间达 524 个月，或者超过 43 年，总利息实际上将少于 12 126 美金. 表 E1-5-1 表明在四种可能的 APR 水平(5%，10%，15%，20%)和四种可能的最小支付设定(2%，3%，4%和 5%)下，3000 美金费用被付清将要花多少年，多少钱将花在利息上. 在我们的例子中，如果做出的支付是 5%(超出她选择的最小支付 3%)，她就能消减支付时间到少于 8 年(下降 82%)，而且把利息降低到只有 1418 美金(下降 88%). 注意一个较低的利率使得作为信用成本的时间和金钱产生了多么大的差别. 表 E1-5-1 最好的情形就是和 5%的贷款一样花钱，选择 5%或更高作为最小支付百分数. 在 5%最小支付下，总利息将只有 260 美金，和

12 126 美金相距甚远(下降 98%)，支付时间将不足 6 年(相比 43.6 年下降 86.5%).

1.6 信贷费和每日平均存款余额

绝大多数信用报告书(比如消费者信用卡报告书)表明，信贷费是利息成本，通过把 APR 月利率应用在每日平均存款余额账户来计算. 根据特定贷款人以及包含或排除什么余额，可以划分为各种应用. 一般而言，**每日平均存款余额**(ADB)用如下公式计算：

$$\boxed{\text{ADB}=\frac{\sum_{i=1}^{k} b_i t_i}{Cy}} \quad I=1,2,\cdots,K$$

其中 b_i 是账户的每日余额，t_i 是余额 b 保持未偿付的时间，CY 是票据处理周期.

例 1.6.1 就十月这个月来说，Linda 的信用卡报告显示如下：

190 美元 从 9 月份转入

50 美元 10 月 5 日支付

72.95 美元 10 月 11 日健康俱乐部付费

210.85 美元 10 月 17 日 J.C. Penney 付费

26.90 美元 10 月 22 日 Friendly's 付费

18.75 美元 10 月 29 日 T.J. Max 付费

表 E1-6-1

日期	每天余额	购买/现金预付款($)	付款($)	余额($)
10/1	4			190.00
10/5	6	72.95	50.00	140.00
10/11	6	210.85		212.95
10/17	5	26.90		423.80
10/22	7	18.75		450.70
10/29	3			469.45
10/31				469.45

如果 APR 是 18%，票据处理周期是 31 天，计算信贷费：

$$\text{ADB}=\frac{\sum_{i=1}^{K} b_i t_i}{Cy}$$

$$=\frac{(\$190\times 4)+(\$140\times 6)+(\$212.95\times 6)+(\$423.80\times 5)+(\$450.70\times 7)+(\$469.45\times 3)}{31}=\$308.39$$

$$\text{每月利率(MR)}=\frac{0.18}{12}=0.015$$

$$\text{每月信贷费(MFC)}=\text{ADB}\cdot\text{MR}=\$308.39\times 0.015=\$4.63$$

每日平均存款余额的种类包括：

1. 除去新购买的 ADBs，其中仅对前月结转的余额计息.
2. 包括新购买的 ADBs，其中对结转的余额和新余额两者都计息. 这种类型有两类，一种具有宽限期，只有当没有前面余额的时候，允许新购买被除去，另一种没有宽限期，允许前面余额和当前余额两者都包含在内.
3. 具有两个周期的 ADBs，其中对当前的周期或前面的周期没有宽限期. 通过对前面和当前周期两者计息，信贷费基本是翻倍的.

1.7　信贷限额与债务限额

信贷限额和债务限额不像它们看起来那样是可交换的项. 信贷限额是最大信贷水平，它是由贷方基于贷款人准则提供给借方的一个开放式信贷账户. 债务限额是最大债务水平，是借款人将允许自己基于可支付能力和个人满足还款责任的债务. 它是一种主观估计，基于两点：了解一个人的金融条件和某些支付能力的评价标准. 理性规定债务限额应该低于潜在的可供信贷限额，因为借款人的利己主义比贷款人商业化提供的延展信用更好单个判断.

当贷款人基于他们自己的考虑，也依赖借款人的信用积分来确定信贷限额的时候，一个借款人的债务限额一般能用三个指标估计：

1. *偿债/可支配收入比.* 所有偿还债务(除去抵押债务)对可支配收入的比率不应该超过 20%. 在 20%和 30%之间的比率将意味着一个借款人可能“过度负债”.

$$\boxed{\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{DI}} \leqslant 0.20}$$

其中 DP 是债务支付，DI 是可支配收入.

2. *债务/资产比率*：在这个比率中的债务也除去了抵押债务. 它是某人偿付能力声明的总度量. 在该度量中债务(D)不应该大于资产(E)的三分之一.

$$\boxed{\frac{D}{E} \leqslant 0.33}$$

3. *连续债务度量.* 这种度量更定性地评估个人经受的债务. 理财专家相信如果一个人在 4 到 5 年期间不能清理债务，那么它将是一个很强的指标来评价这个人将以某种方式依赖债务且不可能完全摆脱债务.

例 1.7.1　确定 Peter 的债务限额状态. 他的总收入是 85 000 美元，他的税金是 21 250美元，他每月的债务支付包括：

抵押：1920 美元

汽车贷款：230 美元

个人贷款：275 美元

信用卡 1：318 美元

信用卡 2：165 美元

首先，我们必须统一是按年计算还是按月计算；其次，我们必须除去抵押支付. 我们

可以得到月可支配收入，如同所给定的逐月保持其他所有债务.

$$年可支配收入 = 总收入 - 税收 = \$85\,000 - \$21\,250 = \$63\,750$$

$$按月可支配收入 = \$63\,750/12 = \$5312.50$$

$$所有债务 = \$230 + \$275 + \$318 + \$165 = \$988$$

$$DP/DI = \$988/\$5312.50 = 18.6\%$$

Peter 仍然 OK，但是几乎处在承受边缘了. 要是他发生更多债务，他的情形将很不好.

例 1.7.2 Jill 和 Tom 有 6700 美元的总货币资产，77 000 美元的投资资产，305 000 美元有形资产，包括了评估为 250 000 美元的房屋价值. 他们也有总额 2320 美元的短期债务和总额 209 000 美元的长期债务，包括 187 000 美元未偿付抵押贷款余额. 这对夫妻如何评估他们的债务限额?

这里我们有这对夫妇资产和债务的足够信息. 最好的标准就是债务/资产比率. 首先得到他们的资产或净值. 我们必须从资产(房屋价值)和负债(抵押余额)两者中除去抵押.

$$总资产 = \$6700 + \$77\,000 + (\$305\,000 - \$250\,000) = \$138\,700$$

$$总负债 = \$2320 + (\$209\,000 - \$187\,000) = \$24\,320$$

$$资产 = \$138\,700 - \$24\,320 = \$114\,380$$

$$D/E = \$24\,320/\$114\,380 = 21.3\%$$

Jill 和 Tom 处于好的财务状态中，他们的债务限额没有达到警戒水平.

第2章　抵押债券

抵押债务是通过得到一笔贷款但是指定购买不动产产生的长期债务，具有以财产本身抵押的债务属性. 这就意味着借款人违反贷款合同时，贷款人将有合法权利取消抵押品赎回权利. 因为这样一笔贷款的数量是大的，加上利息之后变得更大，还清这样一笔贷款渐渐扩展为一个长周期的时间，通常扩展为 30 年. 构建分级支付并在本金和利息部分之间划分它们的过程称为**分期偿还**，它被描述为一种专门处理抵押贷款的方式，尽管它是一种能够应用到其他贷款类型的普遍方式，但却只用到抵押贷款上.

2.1　分期偿还分析

根据 Guthrie 和 Lemon(2004)，分期付款过程的发明是借款领域突破性的事件，它发生在十九世纪头三十年. 直到那个时候，所有的贷款在某个借款期限的末期都随利息一次性整体付清，或者自主决定分期付款. 首套房屋抵押贷款被正式分期付款是由 Comly Rich 在 1931 年得到，资金由宾夕法尼亚州法兰克福未来建制协会提供. 他花费了 375 美元的总额购买了法兰克福一套三居室的房子. 那是永远改变了长期付款贷款结构的向前跨越，引起了普及和广泛流行. 从那时起，债务的分期偿还变成了金融领域最重要的年金应用，变成了商业交易领域至关重要的手段之一.

在分期偿还方法下，在 15 年到 30 年之间任意时段的长期借款期限，通常以月决定支付的次数. 当采用某种利率时，一个相等支付的数列被设定显示在贷款期限末期整个贷款和利息如何被付清. 这种支付序列在本金和利息之间分解，未偿付余额的降低被称为**分期偿还表**.

表 2-1　贷款分期偿还表(贷款 1 000 000 美元，期限 30 年，固定利率 8%)

年限	PYT No.	PYT 总计($)	MPP($)	MIP($)	到期总计 PYT($)	贷款余额($)
第 1 年	1	733.76	67.09	666.67	733.76	99 932.91
	2	733.76	67.55	666.21	1467.52	99 865.36
	3	733.76	68.00	665.76	2201.28	99 797.36
	4	733.76	68.44	665.32	2935.04	99 728.91
	5	733.76	68.91	664.85	3668.80	99 660.00
	6	733.76	69.36	664.40	4402.56	99 590.64
	7	733.76	69.83	663.93	5136.32	99 520.81
	8	733.76	70.29	663.47	5870.08	99 450.52
	9	733.76	70.76	663.80	6603.84	99 379.76
	10	733.76	71.23	662.53	7337.60	99 308.53
	11	733.76	71.71	662.05	8071.36	99 236.82
	12	733.76	72.19	661.57	8805.12	99 164.63

（续）

年限	PYT No.	PYT 总计（$）	MPP（$）	MIP（$）	到期总计 PYT（$）	贷款余额（$）
2nd	24	733.76	78.18	655.58	17 610.24	98 259.94
5th	60	733.76	99.30	634.46	44 025.60	95 069.85
10th	120	733.76	147.95	585.81	88 051.20	87 724.70
15th	180	733.76	220.42	513.34	132 076.80	76 781.55
20th	240	733.76	328.38	405.38	176 102.40	60 477.95
25th	300	733.76	489.25	244.51	220 128.00	36 188.09
30th	360	733.76	728.90	4.86	264 153.60	0

表 2-1 表示了一笔 100 000 美元贷款、8%的利率、30 年期限的部分分期偿付表．贯穿于贷款寿命的全部 360 笔支付没有都显示出来，但是第一年显示了逐月的细节，然后数字跳到了第二年、第五年、第十年、第十五年、第二十年，第二十五年和第三十年，仅仅给出了支付序列后面将看到的普遍意义．

观察分期偿还表，我们注意到如下几点：

- 由于贯穿整个 30 年的期限，固定利率都保持了相同的 8%，抵押支付也保持在 733.76 美元相同．当这笔贷款是可调节利率贷款的时候，抵押支付将不会保持相同．
- 每月本金部分（MPP）开始仅有 67.09 美元，仅仅是支付额的 9%左右；然后缓慢增加，一直在整个期限都保持增加势头；直到最后一次支付达到最大值 728.90 美元，超过了支付额的 99%．
- 恰好与每月本金部分相反，每月利息部分（MIP）以最大值 666.67 美元开始，大约是支付额的 91%；然后缓慢地递减，且在整个期限保持递减，直到最后一次支付达到仅仅 4.86 美元，大约是支付额的 0.006．设计这种结构的目的就是让贷方尽可能早地得到更多利息．
- 到期总支付列表明所有支付的累计，使得边际变动总是等于一次支付．换句话说，这一列的任意数字都能用支付乘以支付的次数得到．例如，假设该笔贷款 10 年后，借方将要支付 $88 051.20（$733.76×120）．
- 贷款余额以 $99 932.91 开始，是贷款额减去首次本金支付（$100 000－$67.09），贷款余额逐月递减前月本金部分的额度．换句话说，任意月份的余额是上月余额减去当月本金部分．例如，第 8 个月余额是 $99 450.52（$99 520.81－$70.29）．
- 每月利息部分（MIP）由前月贷款余额与该月利息乘积决定．例如，第 10 个支付的利息部分（$662.53）由第九个月贷款余额（$99 379.76）和月利息率 0.08/12 的乘积而得到（$99 379.76×(0.08/12)＝$662.53）．
- 每个月的本金部分（MPP）由月支付减去利息部分而得到：PYT－MIP＝MPP．例如，$71.23 的本金部分是从 $733.76 的支付中减去利息部分的 $662.53 得到的（$733.76－$662.53＝$71.23）．
- 每月支付一般作为现值的普通年金给付来计算，现值就是贷款额度．当贷款的现值是 100 000 美元时，利率（r）是 8%的按月复利，期限（n）是 30 年分解成 360 次支付，那么应用下面的公式能得到支付（A）：

$$\boxed{A=\frac{\mathrm{CV}\cdot r}{1-(1+r)^{-n}}}$$

$$=\frac{\$1\ 000\ 000(0.08/12)}{1-[1+(0.08/12)]^{-360}}=\$733.76$$

我们也能通过表方法得到支付，利用下面的公式：

$$\boxed{A=\mathrm{CV}\cdot\frac{1}{a_{\overline{n}|r}}}$$

$$A=(100\ 000)(0.007\ 337\ 6)$$

$$A=766.76$$

例 2.1.1 Jimmy 对一套两居室的公寓有兴趣，要价是 98 000 美元. 他的抵押贷款员告诉他，如果他选择 15 年期限，能得到的最好利率是 5%. 他每个月的支付是多少？(利用公式和表两种方法，给定 $1/a_{\overline{180}|\ (0.05/12)}$ 表值为 0.007 907 94.) $r=\frac{0.05}{12}$，$n=12\times15=180$. 用公式方法：

$$A=\frac{\mathrm{CV}\cdot r}{1-(1+r)^{-n}}=\frac{\$98\ 000(0.05/12)}{1-(1+0.05/12)^{-180}}=\$774.98$$

用表方法：

$$A=\mathrm{CV}\cdot\frac{1}{a_{\overline{180}|\ (0.05/12)}}=\$98\ 000(0.007\ 907\ 94)=\$774.98$$

表 2-2 表明预先计算的因子能快速帮助计算基于不同 APRs 和不同期限 1000 美元分期付款贷款支付. 例如，对一笔 125 000 的贷款，5 年 9%APR，月支付将是 295.50 美元 (125×20.76).

表 2-2　1000 美元分期付款月支付

APR	到期(年/月)									
	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	10
(%)	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120
1	83.79	42.10	28.21	21.26	17.09	14.32	12.33	10.84	9.69	87.60
2	84.24	42.54	28.64	21.70	19.53	14.75	12.77	11.28	10.13	9.20
3	84.69	42.98	29.08	22.13	17.97	15.19	13.21	11.73	10.58	9.66
4	85.15	43.42	29.52	22.58	18.42	15.65	13.67	12.19	11.04	10.12
5	85.61	43.87	29.97	23.03	18.87	16.10	14.13	12.66	11.52	10.61
6	86.07	44.32	30.42	23.49	19.33	16.57	14.61	13.14	12.01	11.10
7	86.53	44.77	30.88	23.95	19.80	17.05	15.09	13.63	12.51	11.61
8	86.99	45.23	31.34	24.41	20.28	17.53	15.59	14.14	13.02	12.113
9	87.45	45.68	31.80	24.88	**20.76**	18.03	16.09	14.65	13.54	12.67
10	87.90	46.14	32.27	25.36	21.25	18.53	16.60	15.17	14.08	13.22
11	88.38	46.61	32.74	25.85	21.74	19.03	17.12	15.71	14.63	13.78
12	88.85	47.07	33.21	26.33	22.24	19.55	17.65	16.25	15.18	14.35
13	89.32	47.54	33.69	26.83	55.75	20.07	18.19	16.81	15.75	14.93

（续）

APR (%)	到期(年/月)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120
14	97.79	48.01	34.18	27.33	23.27	20.61	18.74	17.37	16.33	15.53
15	90.26	48.49	34.67	27.83	23.79	21.14	19.27	17.95	16.92	16.13
16	90.73	48.96	35.16	28.34	24.32	21.69	19.86	18.53	17.53	16.75
17	91.20	49.44	36.65	28.85	24.85	22.25	20.44	19.72	18.14	17.38
18	91.68	49.92	36.15	29.37	25.39	22.81	21.02	19.72	18.76	18.02
19	92.16	50.41	36.66	29.90	25.94	23.38	21.61	20.33	19.39	18.67
20	92.63	50.90	37.16	30.43	26.49	23.95	22.21	20.95	20.13	19.33

知道了相关公式，将不但允许我们在分期偿还系统下计算支付，也允许我们在已知其他项下计算其余的变量. 比如，我们能计算任意贷款在给定了支付背景、利率和期限的任何时间的未支付余额. 在这种情形下，未支付余额将是期限的现值，或者换句话说，剩余贷款的价值贴现在贷款给定利率和特定转换上.

例 2.1.2 借方已经支付了一整年后，表 2-2 中贷款未偿付余额是多少？

借方已经做了 12 次支付，剩余次数是 360－12＝348，这将是我们的 n 值，采用下面的公式：

$$\boxed{CV = \frac{A[1-(1+r)^{-n}]}{r}}$$

$$= \frac{\$733.76[1-(1+0.08/12)^{-348}]}{0.08/12}$$

$$= \$99\ 164.63$$

这恰好是在分期偿还时间表上首年末的余额.

例 2.1.3 如果借方已经按月支付 1057.48 美元 12 年，那么利息 10.5%期限 25 年的 112 000 美元抵押贷款的余额将是多少？

在 12 年内产生了 144 次支付，因此未支付的支付次数将是(25×12)－144＝156.

$$CV = \frac{\$1057.48[1-(1+0.105/12)^{-156}]}{0.105/12} = \$89\ 807.07$$

这将是该笔贷款的分期偿还表在第 12 年行的余额(第 144 次支付行). 如果我们采用 $a_{\overline{n}|r} = a_{\overline{156}|(7/8)}$ 表值方法求解，其中给定月利率为(0.105/12＝0.008 75)，在表中是 7/8，我们也能得到相同的答案.

$$\boxed{CV = A \cdot a_{\overline{n}|r}}$$

$$= A \cdot a_{\overline{156}|(7/8)}$$

$$= \$1057.48(84.925\ 548\ 67) = \$89\ 807.07$$

我们也使用 CV 公式计算特定条件市场中一笔贷款的价值，特别是在利率发生改变的时刻. 于是，我们能通过计算剩余余额用当前市场利息率代替贷款初始利息率贴现的价值

来找到该笔贷款的市场价值.

例 2.1.4　假设前一个例子中贷款起始 15 年后，由另外一家银行得到. 也假设当前市场利率是 11.25%，这家银行应该支付什么价格?

答案在于找到所剩余额的现值[余下 180 次支付：360－(15×12)]，以 11.25%的利率贴现.

$$\begin{aligned}CV&=\frac{A[1-(1+r)^{-n}]}{r}\\&=\frac{\$733.76[1-(1+0.1125/12)^{-180}]}{0.1125/12}=\$63\ 675.40\end{aligned}$$

这是在新市场利率下贷款的价值，和分期偿还时间表第 15 年行显示的余额 76 781.55 比较.

例 2.1.5　分期偿还并不包括抵押贷款，用下面一个分期偿还汽车贷款的例子来说明这点.

Nathalie 从一家当地经销商购买了一辆汽车，花费 10 000 美元，超过 3 年期限以上用 9.5%的优惠利率筹措资金. 她的月支付额是 304 美元，但她不得不出国，所以她请求银行接管贷款. 如果市场利率是 12%，银行将为这笔贷款付多少钱? 用公式和表方法计算.

公式方法：

$$CV=\frac{A[1-(1+r)^{-n}]}{r}=\frac{\$304[1-(1+0.12/12)^{-36}]}{0.12/12}=9152.68$$

表方法：

$$CV=A\cdot a_{\overline{36}|0.01}=\$304(30.107\ 505\ 04)=9152.68$$

如果因为任何理由剩余支付次数并不知道，那么能使用其他信息来计算，例如所剩余额、利率和月支付额. 剩余期限(n)能用下面的公式得到：

$$\boxed{n=\frac{\ln[1-(CV\cdot r)/A]}{\ln(1+r)}}$$

例 2.1.6　假设 Caitlin 收到她的继父签署的抵押贷款信息. 信息显示一笔 36 188.09 美元的贷款剩余余额，利率是 8%，按月支付额 733.76 美元，她想知道还留下了多少次支付?

$$n=\frac{\ln\left[1-\dfrac{\$36\ 188.09(0.08/12)}{\$733.76}\right]}{\ln[1+(0.08/12)]}=60\text{ 次支付}$$

余下总共 60 次支付，将花费 Caitlin 5 年去付清. 这意味着她的父亲已经在该笔贷款上支付了 25 年，这通过看表 2-1 第 25 年的余额是 36 188.09 美元来确认.

2.2　利率、期限和按月支付分期付款的首付的影响

一笔贷款按月支付当然会受到利率的高低、贷款期限长短的影响. 一种经典的操作手法已经为人所知，如果借款人不能降低利率，以便有更能付得起的按月支付额，为此他们得忍受长距离的期限，而这使借款人延长了还款期限. 表 2-3 给出了每 1000 美元任意抵押

贷款在某种利率和还款期限下按月支付的一般估计.

例如，对一笔 140 000 美元、利率 5.5%的抵押，如果我们选择 15 年对比 30 年的期限，我们想比较按月支付的差异如何. 查表 2-3，利率 5.5%和 15 年期限得到 8.17，使得月支付为 1143.80 美元(140×8.17)，对 5.5%的利率和 30 年期限，可以读出是 5.68，使得每月支付 795.20 美元. 我们立刻能得到结论，选择 15 年的短期单每月支付将节约 348.60 美元($1143.80－$795.20)，另外大大节约了贷款寿命中所支付的总利息. 每月节约超过 30%. 当找出一个较好的比率，例如我们可以比较利率 1%或者 1.5%的差异怎么能影响我们的每月支付. 假设 15 年期限、140 000 美元贷款以 4%的利率替代 5.5%的利率得到. 月支付将是 1036 美元(140×7.4)，和 1143.80 美元相比，提供了每个月 107.80 美元($1143.80－$1036)的节约(9.4%)，对整个 30 年期限而言将是 667.80 美元(140×4.77)，提供了 127.40 美元的更高节约($795.20－$667.80)(16%).

表 2-3　一笔 1000 美元抵押贷款在四种可能利息的按月支付

利率(%)	期限(年)			
	15	20	25	30
1	5.98	4.60	3.77	3.22
1.5	6.21	4.83	4.00	3.45
2	6.44	5.06	4.24	3.70
2.5	6.67	5.30	4.49	3.95
3	6.91	5.55	4.74	4.22
3.5	7.15	5.80	5.01	4.49
4	**7.40**	6.06	5.28	**4.77**
4.5	7.65	6.33	5.56	5.07
5	7.91	6.60	5.84	5.37
5.5	**8.17**	6.88	6.14	**5.68**
6	8.44	7.16	6.44	5.99
6.5	8.71	7.45	6.75	6.32
7	8.99	7.75	7.07	6.65
7.5	9.27	8.06	7.39	6.99
8	9.55	8.36	7.72	7.34
8.5	9.85	8.68	8.05	7.69
9	10.14	8.99	8.39	8.05
9.5	10.44	9.32	8.74	8.41
10	10.75	9.65	9.09	8.77

表 2-4 展示了一笔 70 000 美元抵押贷款在四种可能利息和四种期限多种组合的按月支付和整个寿命所付总利息. 一个借款人可以看到更多月份支付将避免很多利息的好处. 当然，在所有的可能中，较短期限和较低利率将是最好选择. 例如，以 6%的利率，选择 15 年期限代替 30 年期限，将导致月支付 591 美元，替代了 420 美元，但是总利息支付了 36 000美元，代替了 81 000 美元. 也就是说，171 美元(40.7%)的月支付增长，引起了总利

息减少 45 000 美元(55.5%).

$$\$591 - \$420 = \$171 \quad \$81\,000 - \$36\,000 = \$45\,000$$

$$\frac{171}{420} \times 100 = 40.7\% \quad \frac{45\,000}{81\,000} \times 100 = 55.5\%$$

表 2-4　一笔 70 000 美元抵押贷款在不同的利息和期限按月支付和整个寿命所付总利息

期限(年)	利率							
	6%		8%		10%		12%	
	PYT($)	总利息($)	PYT($)	总利息($)	PYT($)	总利息($)	PYT($)	总利息($)
30	**420**	**81 000**	524	115 000	614	151 000	**720**	**189 000**
25	451	65 000	540	92 000	636	121 000	737	151 000
20	502	50 000	586	71 000	676	92 000	771	115 000
15	**591**	**36 000**	669	50 000	752	65 000	**840**	**81 000**

表 2-5　一笔 100 000 美元抵押贷款由下降支付大小在 7% 的利率比例在 20 年的月支付

下降支付($)	总资本($)	月付款($)
5000	95 000	736.53
10 000	90 000	**697.77**
15 000	85 000	659.00
20 000	80 000	**620.24**
25 000	75 000	581.48

这种发现在更高利率下(比如 12%)将变得更加戏剧化. 对 15 年期限，月支付将是 840 美元，替代了 30 年期限的 720 美元. 增加了 120 美元($840－$720)，每月多支付 16.6%，在总利息上将得到 108 000 美元的节约. 所以，在较高的利率，如果承担得起，接受高一点的支付额在整个所付利息上将得到巨大的节约.

$$\$840 - \$720 = \$120 \quad \$189\,000 - \$81\,000 = \$108\,000$$

$$\frac{\$120}{\$840} \times 100 = 16.6\% \quad \frac{\$108\,000}{\$189\,000} = 57.1\%$$

分期付款中的首付是另一个影响月支付和整个贷款寿命所付利息的因素. 表 2-5 显示了当首付增大的时候，月支付是怎么下降的. 例如，当借款人把他的首付从 10 000 美元翻倍到 20 000 美元，增长了 100%，月支付从 697.77 美元下降到 620.24 美元，只有 77.53 美元或 11%. 这里变成了一个借款人对现金的机会成本的主观估计事情. 做这种决定主要的问题变成了：为了 77.53 美元的每月节约，值得牺牲额外的 10 000 美元现金吗?

2.3　渐进支付抵押贷款

我们在分期偿还章节看到的抵押支付是根据传统方法设计的，该方法把贷款分解成相等的支付额. 可是，这并不是设计抵押贷款的唯一方式. 在渐进支付抵押贷款中，支付一开始低，以某个时间周期增加，然后保持固定到贷款期限的末期. 这种方法对那些能预测

到在某个时期他们将比拿掉贷款时间能付得起更多的借款人是很有帮助的．为了实现这种方法，贷方决定支付在 k 年内以一个特殊的增长率(g)增长．在为该种类型的抵押建立公式之前，让我们为以常数增长的将来支付的现值建立公式．这是建立在我们能设立渐进支付公式基础之上的．

假设我们有一笔贷款，其首次支付是 A，以常数比率(g)在整个交割期限 n 增长，并且 r 是贷款利息率．因此，我们能写出这些递增的将来支付的现值如下：

$$\mathrm{CV} = A(1+g)\left[\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{n}}{r-g}\right]$$

例 2.3.1 计算一串现金流的现值．首次支付是 2000 美元，以年 5%的比率增长 10 年，给定利率是 8.5%.

$$\mathrm{CV} = A(1+g)\left[\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{n}}{r-g}\right]$$

$$\mathrm{CV}= 200(1+0.05) = \left[\frac{1-\left(\frac{1+0.05}{1+0.085}\right)^{10}}{0.085-0.05}\right]$$

$$\mathrm{CV}= 16\ 774$$

如果按月重新改写公式，我们得到 CV=16 774

$$\mathrm{CV} = A(1+g)\left[\frac{1-\left(\frac{1+(g/12)}{1+(r/12)}\right)^{12n}}{(r/12)-(g/12)}\right]$$

基于这种公式的前提，我们能写出渐进支付公式如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{CV} = {} & A\sum_{i=0}^{k}(1+g)^{i}\left[\frac{1-(1+r/12)^{-12}}{r/12}\right]\left(1+\frac{r}{12}\right)^{-12_i} \\ & +(1+g)^{k}\left[\frac{1-(1+r/12)^{-12(n-k)}}{r/12}\right]\left(1+\frac{r}{12}\right)^{k}\end{aligned}$$

其中

CV：是直到 k 年递增的将来支付的现值．

A：是首次支付额．

k：是支付连续增加的年数．

g：是支付增加的常数比率．

i：是 k 周期每年的次数．

r：是贷款的利率．

因为这个公式是乏味繁长的，我们将使用来自于表 2-6 的准备值(TVs)去简化计算．因此上述公式重新改写如下：

$$\mathrm{CV} = A(\mathrm{TV}_{r,g})$$

从而，初始支付(A)将用下式得到：

$$\boxed{A = \frac{\text{CV}}{\text{TV}_{r,g}}}$$

其中 CV 是贷款额，TV 是由贷款利率(r)和增长比率(g)得到的表值.

例 2.3.2 考虑一笔 150 000 美元的渐进支付抵押贷款类型，利率 9.5%贷款 30 年. 在贷款期限头 7 年期间，在每年末期支付以 5%增长，在该点位将保持固定直到贷款期限结束. 在第一年期间的支付额将是多少?

$$A = \frac{\text{CV}}{\text{TV}_{r,g}} = \frac{150\ 000}{\text{TV}_{0.095,0.05}} = \frac{150\ 000}{143.151\ 659} = 1047.84$$

表 2-6 基于可选择利率和增长利率的 TY 值

增长利率 g	贷款利率 r (%)									
	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5
0.5	126.644 463	121.160 698	116.065 745	111.325 244	106.908 263	102.786 929	98.936 099	95.333 086	91.657 377	88.790 416
1.0	129.049 925	123.435 060	118.218 683	113.365 578	108.844 034	104.625 483	100.684 146	96.996 771	93.542 332	90.301 805
1.5	131.498 844	125.750 320	120.410 161	115.442 265	110.814 132	106.496 478	102.462 889	98.689 526	95.154 840	91.839 335
2.0	133.991 838	128.107 067	122.640 725	117.555 818	112.819 039	108.400 377	104.272 759	100.411 759	96.795 292	93.403 375
2.5	136.529 518	130.505 869	124.910 914	119.706 746	114.859 235	110.337 628	106.114 182	102.163 872	98.464 063	94.994 282
3.0	139.112 518	132.947 321	127.221 288	121.895 576	116.935 214	112.308 697	107.987 601	103.946 280	100.161 548	96.612 430
3.5	141.741 480	135.432 030	129.572 412	124.122 838	119.047 479	114.314 059	109.893 459	105.759 406	101.888 147	98.258 193
4.0	144.417 028	137.960 579	131.964 840	126.389 053	121.196 520	116.354 176	111.832 193	107.603 662	103.644 249	99.931 943
4.5	147.139 814	140.533 581	134.399 147	128.694 763	123.382 846	118.429 526	113.804 257	109.479 475	105.430 258	101.634 062
5.0	149.910 501	143.151 659	136.875 916	131.040 518	125.606 975	120.540 601	115.810 112	111.387 281	107.246 587	103.364 939
5.5	152.729 729	145.815 411	139.395 714	133.426 847	127.869 407	122.687 870	117.850 204	113.327 501	109.093 631	105.124 950
6.0	155.598 169	148.525 473	141.959 131	135.854 315	130.170 668	124.871 831	119.924 999	115.300 577	110.971 811	106.914 493

2.4 抵押点和有效利率

抵押贷款点是由贷方强加、借方提前支付的附加费. 它仅仅是增加贷方利益的一种手段. 抵押贷款点通过推高有效利率将增加借方借贷的成本. 该点通常设定为借款额的 1%. 例如，如果抵押贷款 200 000 美元，7%的利率伴随 3 个点，就意味着从实收款项中扣除 6000 美元($200 000×0.01×3)，实际给借方 194 000 美元，却以 7%的利率偿还 200 000 美元. 为了估计在有效利率上点的影响，我们来考虑一个例子.

例 2.4.1 考虑一笔 85 000 美元、在 9%的利率、2 个点的抵押贷款，期限为 20 年. 首先，让我们计算月支付额. $r=0.09/12=0.0075$；$n=20\times12=240$.

$$A = \text{CV}\left[\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}\right] = 85\ 000\left[\frac{0.0075}{1-(1+0.0075)^{-240}}\right] = \$764.77$$

所以，借方将以 764.77 美元支付 20 年，但他事实上没有得到 85 000 美元，而是得到 85 000美元减去它的 2%，即$85 000(1−2%)=$83 300. 如果插入 764.77 美元的支付，20 年(240 个月)的期限，以及按揭计算器中 83 300 美元的贷款收益，我们得到利率 r 为 9.28%，这就意味着 2 个点把利率从 9%升高到了 9.28%，在利率上 3%的总增加或者每个点 1.5%.

2.5 承担抵押贷款

当买主承担贷款的支付责任并遵守原始协议直到期限结束的时候，一笔现存的抵押贷款在存续期限内某个点能够由买主承担. 当买家想得到一笔具有过去利率且比当前可能利率还低的贷款时，这是特别有价值的. 依据原始合约，满足如此转换的贷款必须是一种“可承担的”贷款. 为了计算买家的所得，让我们看下面这个例子.

例 2.5.1 假设在抵押贷款利率是 9%的这个时间，你找到一个房屋所有人，他愿意让你承担他现存的抵押贷款，贷款在 10 年前以 6.5%的利率得到，具有接下来 20 年 95 000 美元的剩余余额. 如果你承担这么一项贷款，你将如何评估盈利或亏损?

首先，让我们以 6.5%的贷款初始利率计算 95 000 美元未偿付余额的每月支付额. $r=0.065/12=0.005\ 42$；$n=20\times 12=240$.

$$A=\mathrm{CV}\left[\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}\right]=\$95\ 000\left[\frac{0.005\ 42}{1-(1+0.005\ 42)^{-240}}\right]=\$708.73$$

并且，当前市场利率 9%，$r=0.09/12=0.0075$，$n=20\times 12=240$，支付将是

$$A_2=\$95\ 000\left[\frac{0.0075}{1-(1+0.0075)^{-240}}\right]=\$95\ 000\left[\frac{0.0075}{a-(1+0.0075)^{-240}}\right]=\$854.73$$

两种支付之间的差额将是买家每月的补偿.

$$A_2-A_1=\$854.73-\$708.73=\$146$$

我们将通过计算每个月 146 美元逐月补偿的现金流的现值，来考虑接下来的 20 年，这将是 $r=0.09/12=0.0075$ 和 $n=20\times 12=240$ 的贷款整个寿命期间买家的总补偿.

$$\mathrm{CV}=\frac{A[1-(1+r)^{-n}]}{r}=\frac{\$146[1-(1+0.0075)^{-240}]}{0.0075}=\$16\ 227.16$$

因此，这就是从承担贷款中获得的总收益. 决定净收益或损失恰好就是比较承担贷款的总收益和总成本的事情了.

2.6 抵押贷款提前还款罚金

贷方基本从贷款的给付利息获得收入. 当然，收取利息时间越长，他们的收入就越高. 这就是为什么他们用诸如提前还款罚金这样的条款来保护自己的原因了. 要是贷款在其正常期限之前被还清，这就是一笔强加给借款人的费用. 贷方设定了不同的抵押贷款提前还清罚金，贷方也根据贷款类型改变这些罚金. 一般来说，提前还款罚金包括了强加到贷款未支付余额上等于 3 到 6 个月利息的一笔费用. 如果借方终止支付提前还款罚金，借款的成本将会更高，而且会转成实际利率比合同约定的利率还要高的一种利率.

例 2.6.1 假设一笔利率 5%期限 25 年、250 000 美元的抵押贷款，仅仅 3 年后就被提前付清. 抵押贷款合同有一条剩余余额 5 个月利息的提前还款罚金的条款. 计算提前还款罚金.

首先，我们计算贷款的初始月支付额. $r=0.05/12=0.0042$ 和 $n=25\times 12=300$.

$$A = CV\left[\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}\right] = \$\,250\,000\left[\frac{0.0042}{1-(1+0.0042)^{-300}}\right] = \$\,1467.31$$

第二，对余下的 22 年(25－3)，我们用月支付来得到贷款的未支付余额. $r=0.05/12=0.0042$ 和 $n=22\times12=264$.

$$CV = \frac{A[1-(1+r)^{-n}]}{r} = \frac{\$\,1467.31[1-(1+0.0042)^{-264}]}{0.0042} = \$\,233\,818.75$$

提前还款罚金是剩余余额 5%的 5 个月利息支出.

$$\$\,233\,818.75(0.05)\left(\frac{5}{12}\right) = \$\,4871.22$$

2.7　再融资抵押贷款

如果得到一份新的抵押贷款的条款变得比现有的更加有利于房主，大多数人宁愿再融资他们已存在的抵押贷款. 较好的利率和较低的财务成本通常是再融资主要的吸引力. 对借款人主要的刺激就是得到较低的月支付和其他利益，例如从一种可变利率贷款变为固定利率贷款. 当然，再融资也有成本. 尽管贷方在成本费用上会有所改变，但是包含某些点数加上一个覆盖原始和完成一笔新贷款的转换成本的总额，且付清旧贷款将是可能的. 借款人的价值将被概括为得到的利益比抵偿成本更多. 为了评估从再融资抵押贷款获取的收益，让我们考虑一个例子.

例 2.7.1　Joyce 按月抵押支付 1184.87 美元，她想再融资抵押她现有的100 000美元抵押贷款，这是她 4 年前得到的利率为 14%、期限 30 年的抵押贷款. 她的贷款专员建议她可以得到利率 10%的再融资，但她的财务成本将包括支付一笔现存贷款的提前还款罚金，这等于贷款余额 6 个月的利息，还要加上一笔 2000 美元的结算费用. 对 Joyce 而言值得再融资吗？如果值得这么做，Joyce 将待在这所房子多久来弥补支付再融资？

首先，我们计算现存贷款的剩余余额. $r=0.14/12=0.011\,67$ 和 $n=26\times12=312$.

$$CV = \frac{A[1-(1+r)^{-n}]}{r} = \frac{\$\,1184.87[1-(1+0.011\,67)^{-312}]}{0.011\,67} = \$\,98\,837.32$$

第二，我们计算 6 个月利率 14%的提前还款罚金.

$$\$\,98\,837.32(0.14)\left(\frac{1}{2}\right) = \$\,6918.61$$

接下来，我们计算 98 837.21 美元新贷款的按月支付额，该贷款利率 10%、26 年剩余期限. $r=0.10/12$ 和 $n=26\times12=312$.

$$A = CV\left[\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}\right] = \$\,98\,837.32\left[\frac{0.10/12}{1-(1+0.10/12)^{-312}}\right] = \$\,890.50$$

那么，我们能计算借款人的月补偿，即老的支付和新的支付的差额.

$$\$\,1184.87 - \$\,890.50 = \$\,294.37$$

接下来，我们计算剩余 26 年在新利率 10%下的补偿现金流的现值.

$$CV = \frac{A[1-(1+r)^{-n}]}{r}$$

$$CV=\frac{\$294.37[1-(1+0.10/12)^{-312}]}{0.10/12}=\$32\ 672.31$$

这就是 Joyce 享受再融资所有收益的现值. 还必须评估再融资的成本，它包括提前还款罚金和结算费两部分.

$$\text{总的再融资成本}=\$6918.61+\$2000=\$8918.61$$

现在，Joyce 的净收益将是所有收益和所有成本的差额.

$$\$32\ 672.31-\$8918.61=\$23\ 753.70$$

那就是 Joyce 经历当前抵押再融资的全部所得. 可是，该项所得贯穿了 26 年贷款整个剩余寿命. 如果用她得到的每月补偿去除她要付出的整个融资成本 8918.61 美元，我们就得到了**融资恢复时刻**(RRT)：

$$RRT=\frac{\text{总再筹资金花费}}{\text{月再筹资金存款}}=\frac{\$8918.61}{\$294.37}=30.3$$

这就意味着对 Joyce 而言，熬过再融资过程将不值得，除非她为了恢复支付的成本，待在房子里至少 30 个月.

2.8 重叠支付贷款和气球支付贷款

在高利率时代，贷方将通过从借方收集高利率而获利更多. 但是在这些时候，越来越少的借方能支付得起贷款. 所以贷方将要面对更少的贷款需求. 避免这种情形并提高收益的一种策略，就是让借方用新的高利率贷款替换旧的低利率贷款. 他们能做这种替换的唯一条件是承认一笔贷款关联老的贷款. 所以**重叠支付贷款**是在更高利率下的贷款，挂钩一笔新贷款包作为借款人承认新贷款的一项强制约定. 这个包也可能包括了一笔**气球支付**的强加负担，它是一笔特别大的最终支付. 为了理解这个包是如何支付的，让我们举一个例子.

例 2.8.1 小商业主们需要一笔 500 000 美元的贷款，利率 11%期限 20 年(见图 E2-8-1). 银行信贷员建议他们为得到该贷款必须同意：

1. 重签他们 9%的老贷款，350 000 美元未支付余额计入新贷款，利率 11%且在新贷款期限还清(20 年)，尽管根据当前协议还清贷款余下只有 10 年时间.
2. 在第 15 年末期支付一笔气球付款.

这种支付的安排怎么样?

首先，我们计算老贷款的按月支付. $r=0.09/12$ 和 $n=10\times12=120$.

$$A_1=CV\left[\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}\right]=\$350\ 000\left[\frac{0.09/12}{1-(1+0.09/12)^{-120}}\right]=\$4433.65$$

然后计算新贷款的每月支付，这包括了新额度 500 000 美元和老贷款以新利率 11%的余额挂钩($500 000+$350 000=$850 000).

$$A_2=\$850\ 000\left[\frac{0.11/12}{1-(1+0.11/12)^{-240}}\right]=\$8773.60$$

最后，我们计算将覆盖期限最后 5 年的气球支付，这将是最后 5 年 8773.60 美元支付的现值. $n=5\times12=60$.

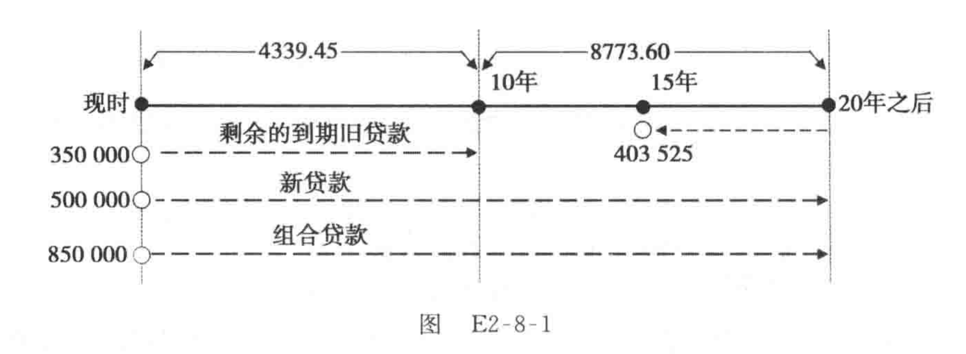


图　E2-8-1

$$CV_B=\frac{A[1-(1+r)^{-n}]}{r}=\frac{8773.60[1-(1+0.11/12)^{-60}]}{0.11/12}=\$403\ 524.48$$

这就是在第15年末做出的最后支付，覆盖了接下来的5年直到第20年末期.

- 对前10年，支付将等于新旧支付之间的差额：\$8773.60－\$4433.65＝\$4339.95.
- 对11～15年，8773.60美元的新支付是有效的.

2.9　偿债基金

偿债基金方法没有特别关联抵押债务，但它和分期偿还方法是可以比较的．特别建立偿债基金是为了指定目的用系统方式累积资金．特别地，它们被用于满足将来的金融需要，例如某些退休债务、赎回债券发行、购买新设备或者替换破旧机器．知道了将来需要钱的数额、需要钱的时间以及使之增长的必要利息率，使得这类基金和普通年金一样具有待确定的支付．支付周期性进行，等于基金里的存款．存款序列将获得利息和累积到将来目标的收益．在退休债务的情形，偿债基金将有两种分开的功能.

1. 当基金到期，继续为债务支付利率.
2. 当基金到期，累积足够的数额付清本金.

这将暗示着两种功能可能用不同的利率处理．因为借钱总是比存钱更昂贵，支付的利率将可能高于建立本金付清的存款收益利率.

类似于分期偿还方法，偿债基金方法将构造本金付清累积进入被称为偿债基金的表．它明显地显示了所做存款的序列，它们获得的利率，以及基金如何得以累积在期限末期达到目标数额．那个数额恰好等于本金.

例2.9.1　一个有一笔6500美元贷款的小商户，其贷款必须在3年内以按季度支付利率14.5%付清．商人开立了一个偿债基金的账户，在第3年末付清其债务的本金．这个账户支付13%的复合季度利率.

(a) 季度利息支付将是多少?

(b) 偿债基金表看起来像什么?

(a) 贷款的总利息如下得到：

$$I=P\cdot r\cdot t=\$6500(0.145)(3)=\$2827.50$$

利息的季度支付额(QI)将为

$$QI=\frac{I}{n}=\frac{\$2827.50}{3\times4}=\$235.62$$

(b) 偿债基金表的关键是按季度存款，该借款人不得不做足够的累积以便付清 3 年末的 6500 美元(表 E2-9-1). 我们把这作为普通年金支付来处理，这时将来值是已知的 6500 美元，r 是季度利率($0.13/4=0.0325$)且 $n=3\times4=12$.

$$A=\frac{\mathrm{FV}\cdot r}{[(1+r)^n-1]}=\frac{(\$6500)(0.0325)}{[(1+0.0325)^{12}-1]}=\$451.54$$

我们也能用表方法得到支付额，其中年金支付(A)为：

$$A=\mathrm{FV}\cdot S_{\overline{n}|r}=\mathrm{FV}\left(\frac{1}{a_{\overline{n}|r}}-r\right)=\$6500\left(\frac{1}{a_{\overline{12}|0.00325}}-0.0325\right)$$

$$=\$6500(0.101\ 967\ 19-0.0325)=\$451.54$$

表 E2-9-1 偿债基金表

年	季度	基金利息($)	存款($)	存款增长($)	偿债基金累积($)	账面价值($)
	1	—	451.54	451.54	451.54	6048.45
	2	14.68	451.54	466.22	917.76	5582.24
	3	29.83	451.54	481.37	1399.12	5100.88
	4	45.47	451.54	497.01	1896.13	4603.87
2	5	61.62	451.54	513.16	2409.30	4090.70
	6	78.30	451.54	529.84	2939.14	3560.86
	7	95.52	451.54	547.06	3486.20	3013.80
	8	113.30	451.54	564.84	4051.04	2448.96
3	9	131.66	451.54	583.20	4634.24	1865.76
	10	150.61	451.54	602.15	5236.40	1263.60
	11	170.18	451.54	621.72	5858.12	641.88
	12	190.39	451.50	641.89	6500.00	0
		1081.56	5418.44	6500.00		

观察

- 计算的首个值是在偿债基金累积列的值. 每个值都是普通年金的将来值，能用下述公式得到：

$$\mathrm{FV}=\frac{A[(1+r)^n-1]}{r}$$

例如，第二个季度的值将是

$$\mathrm{FV}=\frac{\$451.54[(1+0.0325)^2-1]}{0.0325}=\$917.76$$

在该列中的任意值都能用表方法计算. 例如，要找出在第 9 个季度末期已经累积多少基金，我们用

$$\mathrm{FV}=A\cdot S_{\overline{n}|r}=\$451.54\cdot S_{\overline{9}|0.0325}=\$451.54(10.263\ 194\ 01)=\$4634.24$$

在偿债基金累积列的值也能从偿债基金表内得到. 如果列内每个值都被加到了下个季度存款增长值上，那么下一个累积值就能得到. 例如，我们加 451.54 美元到 466.22 美元，就得到了 917.76 美元，我们加 917.76 美元到 48 137 美元，就得到 1399.12 美元，等等.

- 在偿债基金累积余额上应用 0.0325 的季度利率，将给我们记录在第二列基金所得的

季度利息. 例如，首次存款利息记账在第二季度 14.68 美元= $451.54×0.0325，第二季度余额的利息记账在第三季度，29.83 美元= $917.76×0.0325，等等.

- 在存款增长列的值通过把存款加到相应利息得到. 比如，在第 8 个季度，增长是 546.84 美元，即 $451.54+ $113.30.
- 最后一列展示账面价值，这是由本金 6500 美元减去每个季度的累积值所得. 例如，第 7 个季度的账面价值是 3013.80 美元，即 $6500− $3486.20. 当累积基金在第 12 个季度末达到 6500 美元的目标，账面价值将为 0，意味着债务已经被付清，并且其余额已经被清除($6500− $6500=0).
- 存款增长列的总额是目标增长数字 6500 美元，第 12 次存款 5418.44 美元、所获利息 1081.56 美元的总额已经增长过量.

$$12 \times \$451.54 = \$5418.44 + \$1081.56 = \$6500$$

例 2.9.2 为了建一座新的体育馆，一家本地运动俱乐部以 7%半年支付利率、15 年期限借款 500 000 美元. 俱乐部董事会设立一个按月复合支付 6%利率的偿债基金. 该基金既被用于及时支付贷款利息，也被用于在 15 年内收回原始本金.

(a) 贷款所付利息是多少?

(b) 给偿债基金每月存款多少?

(c) 俱乐部每月付多少利息和本金?

(a) 利息支付:

$$\text{半年利率} = 0.07/2 = 0.035$$

$$\text{每 6 个月支付 } \$500\,000 \times 0.035 = \$17\,500$$

(b) 每月存入偿债基金:

月利率=0.06/12=0.005 或 1/2%；$n=15\times12=180$.

$$A = \frac{FV \cdot r}{(1+r)^n - 1} = \frac{\$500\,000(0.005)}{(1+0.005)^{180}-1}$$

$$= \$1719.29 \quad \text{每月存入偿债基金}$$

并且用表方法，这里 $1/a_{\overline{180}|\frac{1}{2}\%}$ 的值给定为 0.00 843 857，A 为

$$A = FV\left(\frac{1}{a_{\overline{180}|\frac{1}{2}\%}} - 0.005\right) = \$500\,000[(0.008\,438\,57) - 0.005] = \$1719.29$$

(c) 总支付：我们以相同方式得到利率基金的按月支付额. 月利率=0.06/12=0.005，n=6 个月.

$$A = \frac{FV \cdot r}{[(1+r)^n - 1]} = \frac{\$17\,500(0.005)}{[(1+0.005)^6 - 1]} = \$2880.42$$

用表方法:

$$A = FV\left(\frac{1}{a_{\overline{n}|r}} - r\right) = \$17\,500\left(\frac{1}{a_{\overline{6}|\frac{1}{2}\%}} - 0.005\right)$$

$$= \$17\,500[(0.169\,595\,46) - 0.005] = \$2880.42$$

$$\text{按月总支付} = \text{按月利率支付} + \text{按月本金支付}$$

$$= \$2880.42 + \$1719.29 = \$4599.71$$

例 2.9.3 一个市政厅管理机构发出了总额 2 000 000 美元的地方债，携带 8%的季度利率. 这个城市需要建立一个偿债基金在 10 年内赎回债券. 如果基金支付 7.5%的复合季度利率，城市得存入基金多少额度存款？将支出多少额度利息？总额将是多少？

债券的利率将是($r=0.08/4=0.02$)

$$I = P \cdot r \cdot t = \$2\,000\,000(0.08)\left(\frac{1}{4}\right) = \$40\,000 \quad 每季度$$

存入基金的存款将是($r=0.07/4=0.01875$；$n=10\times4=40$)

$$A = \frac{\text{FV} \cdot r}{(1+r)^n - 1} = \frac{\$2\,000\,000(0.018\,75)}{(1.018\,75)^{40} - 1} = \$34\,018.26$$

用表方法，

$$A = \text{FV}\left(\frac{1}{a_{\overline{n}|r}} - r\right) = \$2\,000\,000\left(\frac{1}{a_{\overline{40}|1\frac{7}{8}\%}} - 0.1875\right)$$

$$= \$2\,000\,000(0.035\,759\,13 - 0.018\,75) = \$34\,018.26$$

$$每季度总支付 = 每季度利息 + 每季度存款$$

$$= \$40\,000 + \$34\,018.26 = \$74\,018.26$$

2.10 比较分期付款和偿债基金方法

在分期付款方法中，一笔贷款通过一系列等额支付得以偿清，每次都包括利息部分和本金部分. 当所有的支付都完成，整个贷款(本金和利息)将被付清. 在偿债基金方法中，为了两个分开的目的有两个账户：一个用于支付利息伴随利息到期，另一个用于建立基金，且等待直到基金等于本金. 在那个时刻将用一次支付付清本金.

这种重要差异导致了另一个主要的差别，偿债基金要处理两种不同的利率，相比分期付款情形则只有一种利率. 这就可能导致了两种方法之间有不同的负债成本，除非所有的利率都相等，负债成本才会相同. 如果偿债基金的存款利率低于所付债务的利率，偿债基金方法的周期成本将比分期付款方法要高. 让我们考虑下面的情形. 假设 r_1 是两种方法中每个周期加在债务上的利率，r_2 是相同周期偿债基金存款所得利率，n 是到期期限，P 是贷款本金，A_1 和 A_2 是两种方法中的利息和本金支付. 那么：

$$分期付款: A_1 = \frac{P}{a_{\overline{n}|r_1}} = \text{Pr} + \frac{P}{S_{\overline{n}|r_1}}$$

$$偿债基金: A_2 = \text{Pr}_1 + \frac{P}{S_{\overline{n}|r_2}}$$

那么就可以得到以下结论：

- 如果 $r_1 > r_2 \to S_{\overline{n}|r_1} > S_{\overline{n}|r_2} \to A_1 < A_2$，那么分期支付比偿债基金成本要小.
- 如果 $r_1 = r_2$，那么 $A_1 = A_2$，且没有差别.
- 如果 $r_1 < r_2 \to S_{\overline{n}|r_1} < S_{\overline{n}|r_2} \to A_1 > A_2$，那么偿债基金成本较小.

等式成立仅当所付利率在两种方法中是相等的，此时问题将变为偿债基金存款利率是不是能够补偿贷款支付利率.

第3章 租　　赁

租赁被定义为有权利使用一种产品，并从使用中获取所有收益，同时租赁所有权标记在所有者手中，而所有者则是租赁让渡者．在租赁协议下使用产品的一方被称为**承租人**，拥有产品、产生且提供租赁协议的一方被称为**出租人**．双方都必须估计租赁成本和收益，并且在签协议和执行协议之前，预期收益超过成本．对出租人来说，租赁是一种投资形式，依靠这种形式出租人预期得到的投资回报率等于其自身要求的资本成本．对承租人关键的问题是：购买产品或者租赁产品，哪一种将不太昂贵？因为租赁包含某段时间一系列周期支付，所以租赁被假设为负债筹资的一种形式，并且替代租赁的选择就是用信用购买，那么在两者之间做出正确选择就变成了债务管理的问题．在这种分析下，我们来比较项目中两种替代选择的成本：

1. 包含在两种交易中将来支付的现值．
2. 交易的税后形式．

我们首先分析承租人这一方，然后再分析出租人一方．

3.1 对承租人

用信用购买的成本

信用购买的成本是用付清产品购买价格而做出的所有支付的现值来估计的．毫不奇怪，现值证明是购买价格本身．这很简单，因为我们正在切换货币价值的方向．所以，今天用 x 货币量购买一件产品．付清将用多次支付和利率 r，最终将累积为 $x+m$ 的将来值．现在，如果这个将来值使用相同的利率 r 贴现回现在，将来值将退回到 x．这是没有考虑税收影响的情况，但是有趣地，当使用税后贴现率计算税后支付的现值，我们最终把购买价格贴现回了现在．下面的例子说明信用购买做出的所有支付现值如何等于考虑税前和税后的购买价格．

例 3.1.1 用 2990.60 美元信用购买一台机器，利率 20%、5 年内付清、每年支付 1000 美元(见图 E3-1-1)，所有 5 年支付的现值将是多少？

$$\begin{aligned}\mathrm{CV}&=\frac{A[1-(1+r)^{-n}]}{r}\\&=\frac{\$1000[1-(1+0.20)^{-5}]}{0.20}\\&=\$2990.60\end{aligned}$$

和前面类似，如果把这些每次 1000 美元的 5 次支付，从它们自己将来的时刻带回到现在时刻，我们要逐个把它们贴现为现值，这里要把所有现值加起来成为现在形式(表 E3-1-1a)．

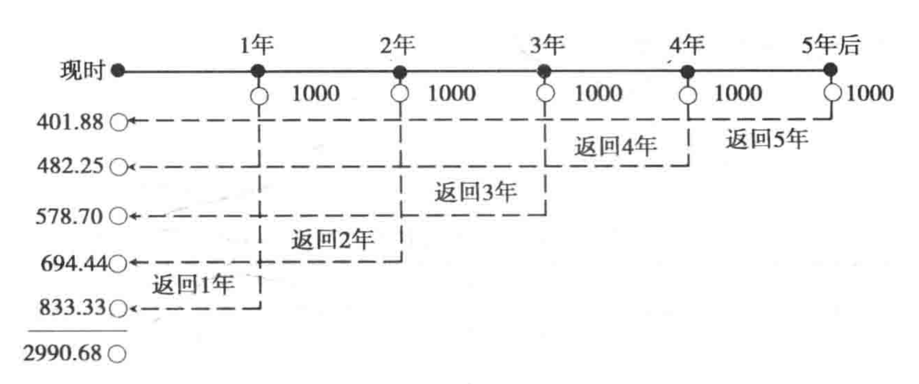


图 E3-1-1

表 E3-1-1a

年	支付($)	当前值因素$(1+r)^{-n}$	当前值($)
1	1000	$(1+0.20)^{-1}$	833.33
2	1000	$(1+0.20)^{-2}$	694.44
3	1000	$(1+0.20)^{-3}$	578.70
4	1000	$(1+0.20)^{-4}$	482.25
5	1000	$(1+0.20)^{-5}$	401.88
	5000		2990.60 现值

现在，让我们找出这些支付的税后现值，其中借款的成本将是债务的税后有效成本．设税率是 40%．我们知道因为支付分解为本金和利息两个部分，只有利息才征税．税后利息因此是

$$I_{at}=I_{bt}(1-t)$$

其中 I_{at} 是税后利息，I_{bt} 是税前利息，t 是税率．

表 E3-1-1b 显示了每次 1000 美元的支付是如何在本金和利息部分之间分解的，其中仅仅只有利息部分征税，但是本金部分和调节税利息将构成总税后负担．对所有这些年度税后负担计算现值，在末期是等于 2990.60 美元的原始购买价格，和我们已经看到的税前的情形是一样的．

作为一个例子，让我们看看 1000 美元的首次支付在利息和本金之间分解的方式．

- 把 20%的利率用在原始本金(购买价格)上就得到了利息部分：

$$\$2990.60\times 0.20=\$598.12$$

- 余下的支付就是本金部分：

$$\$1000-\$598.12=\$401.88$$

- 从原始本金 2990.60 美元中拿掉支付的本金部分：

$$\$2990.60-\$401.88=\$2588.72$$

- 我们把 40%的税率应用在利息部分：

$$\$598.12(1-0.40)=\$358.87$$

- 我们把税收调节利息加到本金部分，得到从支付 1 产生的 1 年总税后负担．

$$\$358.87+\$401.88=\$760.75$$

- 我们用税后比率贴现该税后总负担：

$$税后比率 = 0.20(1-0.40) = 0.12$$

$$CV_1 = \frac{760.75}{(1+0.12)^1} = \$679.24$$

表 E3-1-1b 税后支付的现值

(1) 年	(2) 支付	(3)利息部分 [(5)×0.20]	(4)本金部分 [(2)−(3)]	(5)资本余额 $2990.60 [(5)−(4)]	(6)利息的税后负担 [(3)(1−0.4)]	(7)总税后负担 [(4)+(6)]	(8)税后负担 的 PV [(7)×αd.f.)
1	1000	598.12	401.88	2588.72	358.87	760.75	679.24
2	1000	517.74	482.26	2106.46	310.64	792.90	632.09
3	1000	421.29	578.71	1527.75	252.78	831.48	591.84
4	1000	305.55	694.45	833.30	183.33	877.78	557.85
5	1000	166.66	833.30	0	100.00	933.30	529.58
	5000	2009.40	2990.60				2990.60

- 我们把(8)列所有税后负担的现值合计得到现值 2990.60 美元，恰好等于原始购买价格.
- 注意到所有利息部分合计为 2009.40 美元，如果加到本金 2990.60 美元上得 5000 美元，这就等于每年支付 1000 美元 5 年的支付额.

租赁成本

构成租赁成本的四个主要组件如下：

1. 租赁支付的直接成本.
2. 折旧的机会成本.
3. 残值的机会成本.
4. 服务和维修成本.

支付成本是简单而直接的，折旧的机会成本反映了租赁资产的人将资产所有者可能会要求的放弃资产折旧的税收利益. 可能仅有所有者要求的资产残值(折余值)的机会成本逻辑相同.

所以当资产被租赁的时候，承租人放弃了这种利益. 服务和维修成本是能够被出租人主张的唯一组件，因为绝大多数出租资产都附带一条嵌入条款. 但是如果资产被购买，服务和维修成本必须由买家承担. 因此前三个组件是附加元素，但是第四个组件服务和维修成本是唯一一个从租赁成本中扣除的组件. 所有因素都以现值考虑且为税后状态.

$$PV(LC) = [PV(pyt) + PV(D) + PV(slvg)] - PV(svc)$$

这里 LC 是租赁成本，pyt 是租赁支付，D 是租赁资产的年折旧，slvg 是租赁资产的折余值或残值，svc 是租赁资产的维修服务费.

- 支付的现值将由下式得到：

$$PV(pyt) = (1-t)pyt(a_{m\overline{n}\rceil mr})$$

这里 t 是税率，mr 是月税后利率，mn 是月租赁项．支付现值也能用年金公式的正则现值得到．

$$\boxed{PV(pyt) = (1-t)pyt \cdot \frac{1-(1+mr)^{-mn}}{mr}}$$

• 折旧的现值将用如下公式得到：

$$\boxed{PV(D) = (t)D(a_{\overline{n}\rceil r})}$$

这里 $(t)D$ 是租赁资产年折旧的税，r 是年税后利率，n 是租赁的年度期限，这也能用正则公式得到．

$$\boxed{PV(D) = (t)D\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right]}$$

• 折余现值将用下式得到：

$$PV(slvg) = CV(slvg) = (1-t)slvg(v^n)$$

这里 slvg 是税收调节的租赁资产的折余值或残值．得到现值是因为它是一次过程，残值也能用正则公式得到：

$$\boxed{CV(slvg) = (1-t)slvg\left[\frac{1}{(1+r)^n}\right]}$$

其中 r 是年税后利率，n 是租赁的年度期限．

• 服务的现值将用下式得到：

$$PV(svc) = (1-t)svc(a_{m\overline{n}\rceil mr})$$

其中 svc 是税收调节的租赁资产月度维修服务费，mn 是月度租赁期限，mr 是月度税后利率．正则公式将是

$$\boxed{PV(svc) = (1-t)svc\left[\frac{1-(1+mr)^{-mn}}{mr}\right]}$$

下面的例子说明所有这四个元素是如何放在一起构成租赁现值的．

例 3.1.2 我们部门需要一台新的更好用的复印机．预算委员会在考虑是买一台还是租一台．40 000 美元购买价格能以 9%的利率筹措经费，估计这台机器有 8 年的产品寿命，到期后残值将是原始价格的 10%．本地经销商提供该机器 8 年租赁，每月 850 美元的支付包括正常服务费每月 90 美元．给定税率是 36%，资产折旧方式是直线，最好是买这台机器，还是租该机器？

以 9%利率筹措购买费用的现值是购买价格 40 000 美元本身．租赁成本的现值是三个组件的和减去服务费用的现值：

$$PV(L) = [PV(pyt) + PV(D) + PV(slvg)] - PV(svc)$$

PV(pyt)：

$$月支付 = \$850$$

$$税后支付 = \$850(1-0.36) = \$544$$

$$n = 8 \times 12 = 96 \quad 个月$$

调节利率：$0.09(1-0.36) = 0.0576$

$$月调节利率 = \frac{0.0576}{12} = 0.0048$$

$$\begin{aligned} PV(pyt) &= \frac{A[1-(1+r)^{-n}]}{r} \\ &= \frac{\$544[1-(1+0.0048)^{-96}]}{0.0048} \\ &= \boxed{\$41\ 766} \end{aligned}$$

PV(D)：

$$8年折旧(D) = \$40\ 000 - \$40\ 000(0.10) = \$36\ 000$$

$$每年折旧 = \frac{\$36\ 000}{8} = \$4500$$

$$税收调节折旧(Dt) = \$4500(0.36) = \$1620$$

$$\begin{aligned} PV(D) &= \frac{A[1-(1+r)^{-n}]}{r} \\ &= \frac{\$1620[1-(1+0.0576)^{-8}]}{0.0576} \\ &= \boxed{\$10\ 156} \end{aligned}$$

PV(slvg)：残值是原始价格的10%.

$$\$40\ 000 \times 0.10 = \$4000$$

$$\begin{aligned} PV = CV &= \frac{\$4000}{(1+0.0576)^8} \\ &= \boxed{\$2555.60} \end{aligned}$$

PV(svc)：

$$调节服务 = \$200(1-0.36) = \$128$$

$$\begin{aligned} PV &= \frac{A[1-(1+r)^{-n}]}{r} = \frac{\$128[1-(1+0.0048)^{-96}]}{0.0048} \\ &= \boxed{\$9827.34} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PV(L) &= [(\$41\ 766 + \$10\ 156 + \$2555.60)] - \$9827.34 \\ &= \boxed{\$44\ 650} \end{aligned}$$

租赁成本的现值大于购买成本的现值，所以购买这台机器将是最好的.

3.2 对出租人

对出租人，租赁是一种投资交易. 出租人想获取可能的最高投资回报. 所以，他将用自己的条款来定合同，根据自己资本成本的要求决定支付金额. 租赁支付的现值加上折旧的现值和残值将等于他为资产支付的价格. 这里仍然考虑税收调节，除了出租人的税率可

能不同于承租人部分，利率是他要求的回报率，但不会对税收调节.

例 3.2.1 一家本地租赁店正租赁一件重型设备，其价值是 8 万美元，用直线法在 5 年内它的价值折旧到 10%. 这个价值将是第 5 年末考虑的残值. 如果商店要求资本成本是 18%、税率是 40%，月租赁支付将是多少？

$$\text{PV(原始价值)} = \text{PV(pyt)} + \text{PV}(D) + \text{PV(slvg)}$$

PV(pty)：这里租赁支付是未知的，但是我们知道租赁支付应该乘以$(1-t)$调节税收.

$$\text{月利率} = \frac{0.18}{12} = 0.015 \qquad \text{月期限} = 5 \times 12 = 60$$

$$\text{PV(pyt)} = \frac{(1-0.4)L[1-(1+r)^{-n}]}{r} = \frac{0.6L[1-(1+0.015)^{-60}]}{0.015}$$

$$= \boxed{0.6L(39.380)}$$

PV(D)：

$$\text{折旧} = \$80\,000 - \$80\,000(0.10) = \$72\,000$$

$$\text{年折旧} = \$72\,000/5 = \$14\,400$$

$$\text{税收调节折旧} = Dt = \$14\,400(0.4) = \$5760$$

$$\text{PV}(D) = \frac{\$5760[1-(1+0.18)^5]}{0.18}$$

$$= \boxed{18.012}$$

PV(slvg)：

$$\text{残值} = 0.10(\$80\,000) = \$8000$$

$$\text{CV(slvg)} = \frac{\$8000}{(1+0.18)^5}$$

$$= \boxed{\$3497}$$

$$\text{PV(原始价值)} = \text{PV(pyt)} + \text{PV}(D) + \text{PV(slvg)}$$

$$\$80\,000 = 0.6L(39.380) + 18.012 + \$3497$$

$$23.625L = \$58\,491$$

$$L = \frac{\$58\,491}{23.628}$$

$$= \boxed{\$2475.49}$$

租赁商店为了达到要求的回报率，租赁支付应该设在每月 2475.49 美元.

单元三附录

小结

由消费和营业导致的债务不一定是坏事，除非债务完全失控了. 如果理解到位、管理有效，债务能化作经济的激励、成为经济增长的有效元素. 债务能逐渐提高购买力，特别是扩展当前消费. 但是，如果收入增长不能补偿债务消费，危机就仍然存在：扩张当期消费可能意味着减少了将来消费. 因此，接受并且喜爱使用信用，变成了一种今天有更多消费，还是明天有更多消费的选择. 这就是为什么理解债务如何工作是成功财务管理的一个基本部分.

基于偿还的结构，债务要么是分期支付债务，要么是非分期支付债务. 分期支付债务更加普遍，并和分期偿还过程联系在一起，而分期偿还能把偿还过程分解为周期支付来处理大额债务. 周期支付在整个借款期限大都是均匀的，它们可能在利息和本金之间如何分配上会有不同. 在水平方法下，利息和本金部分二者在整个期限都保持了相同. 在 78 规则和余额递减方法下，利息和本金二者在整个期限都是变化的. 如何收取和集中利息是另外一个问题，其贷款可以是追加利息的、贴现的或单一付款的. 当不考虑后来的支付在本金中的减少会降低利率，我们能够计算一个更高的实际有效的利率，这是名义和实际 APR 的区别.

借款人信贷费用能够随着高利率和长偿还周期戏剧性增加. 如果支付持续很长的时间，只对循环贷款付最小支付可能是十分昂贵的. 信贷限额由贷方评估，而债务限额应该由借方评估，两者之间有本质的差异. 对借方而言债务限额小于信贷限额总是更好的.

抵押和偿债基金由分期偿还过程构成，并且作为普通年金处理. 它们的支付和其他变量能用公式法和表方法来计算.

公式列表

78 规则

决定利率部分的分数

$$K_i = \frac{j}{D}$$

所有支付的适当分母

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

剩余支付的适当分母

$$D_u = \frac{N_u(N_u+1)}{2}$$

退税因子

$$\mathrm{RF} = \frac{D_u}{D_n}$$

折扣

$$\mathrm{Rb} = \mathrm{RF}(\mathrm{I})$$

追加利息

追加支付

$$\text{PYT} = \frac{P(1+rn)}{n}$$

实际 APR 公式 1

$$\text{APR}_a^1 = \frac{2KI}{P(n+1)}$$

实际 APR 公式 2(n-比率公式)

$$\text{APR}_a^2 = \frac{K(95n+9)I}{12n(n+1)(4P+I)}$$

每日平均存款余额

每日平均存款余额

$$\text{ADB} = \frac{\sum_{i=1}^{K} b_i t_i}{c_y}$$

每月信贷费

$$\text{MFC} = \text{ADB} \cdot \text{MR}$$

债务限额

债务支付/可支配收入比率

$$\frac{\text{DP}}{\text{DI}} \leqslant 0.20$$

债务/资产比率

$$\frac{D}{E} \leqslant 0.33$$

分期偿还

分期偿还贷款的每月支付

$$A = \frac{\text{CV} \cdot r}{1-(1+r)^{-n}}$$

使用表值的分期偿还贷款的每月支付

$$A = \text{CV} \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|r}}$$

分期偿还贷款的余额

$$\text{CV} = \frac{A[(1+r)^{-n}]}{r}$$

使用表值的分期偿还贷款的余额

$$\text{CV} = A \cdot a_{\overline{n}|r}$$

分期偿还贷款的期限

$$n = \frac{\ln[1-(\text{CV} \cdot r)/A]}{\ln(1+r)}$$

偿债基金

偿债基金存款

$$A = \frac{\text{FV} \cdot r}{(1+r)^n - 1}$$

使用表值的偿债基金存款

$$A = \text{FV} \cdot \frac{1}{S_{\overline{n}|r}}$$

偿债基金累积

$$\text{FV} = \frac{A[(1+r)^n - 1]}{r}$$

使用表值的偿债基金累积

$$\text{FV} = A \cdot S_{\overline{n}|r}$$

习题

1. 一笔年利率 11%、18 个月的 1300 美元贷款，使用水平方法，计算(a)每月支付额；(b)每月利息部分(MIP)；(c)每月本金部分(MPP).
2. 使用两个公式 APR_a^1 和 APR_a^2，对练习 1 的贷款计算利息的实际年百分率.
3. 如果年利率是 10%、期限是 1.5 年，一笔 900 美元的按月支付如何在利息和本金之间分解?
4. Margaret 得到了一笔 1200 美元的、利率 8.75%、1 年期限的个人贷款. 给定银行适用 78 规则，构造显示支付号、支付分数、月利率部分、月本金部分和月支付 5 列的支付表.
5. 假设给了 Margaret 另外一种选择：增加其贷款到 1500 美元，但是利率 10%，并且她能

把支付扩展超过 2 年. 如果方法仍然是 78 规则，(a)每月支付将是多少？(b)对于(1)首次支付利息和本金之间的分解将是多少？(2)对于第 10 次支付，利息和本金间的分解将是多少？(3)对第 23 次支付呢？

6. 如果你考虑一笔贷款的月支付，在 78 规则下如果该笔贷款的期限是 3.5 年，确定分母(D)将是多少？
7. 当计算利息的时候，如果银行依照 78 规则，对一笔期限为 52 个月的贷款，计算 D.
8. Glenn 有一笔 4500 美元的汽车贷款，年利率 7%、期限 3 年. 已经支付了 29 次后，他决定付清剩余余额. 在 78 规则下，剩余期限将是多少？
9. 如果 Glenn 已经支付了 20 次后，他决定把余额归并到一块在第 21 次一起支付，Glenn 的余额将是多少(假设贷方依照水平方法)？
10. Lynn 有一笔 2000 美元个人贷款、利率是 9.5%、期限 18 个月. 假设她可以选择水平方法或者 78 规则方法，并且在做了月支付 1 年后，她想还清剩余余额. 她将选择哪一种方法？在利息上她将支付多少差额？
11. 一笔 5%年利率 2000 美元的贷款，如果借方在 24 次支付期限中支付 10 次后，决定支付全部，折扣是多少？
12. 求一笔 48 个月、追加年利率 9%、4000 美元贷款的月支付. 如果这笔贷款在第 30 个月被付清(假设第 29 次支付已经完成)，求最终余额.
13. 基于追加利息，Sally 得到了一笔 3400 美元的贷款，年利率 6.5%期限 4 年. 他半年支付额将是多少？贷款的总利息支付额将是多少？
14. Sally 的家具花费 3750 美元负担 19.75%的年利率，如果她选择只付未偿余额 2%的最低月支付额，为家具付款将花 Sally 多久时间？
15. 如果最小支付变为 3750 美元未偿余额的 3%，但是利率提高到 23%，为相同购买付款将花 Sally 多久？她将总计支付多少利息？
16. Drew 的账户上有 9.5%的 APR 和 30 天票据处理周期，计算平均每日余额和信贷费. 他的 1 月记录显示：

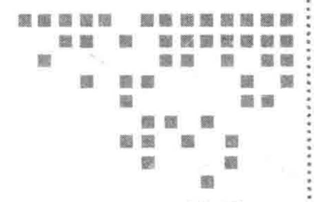
    425.89 美元　从 12 月结转余额
    133.15 美元　1 月 5 日 K-Mart 付费
    76.95 美元　1 月 8 日 Greek 烹饪饭店付费
    150.00 美元　1 月 10 日支付付费
    25.25 美元　1 月 11 日 Texaco 加油费
    33.15 美元　1 月 21 日 Target 付费
    80.00 美元　1 月 26 日健康俱乐部付费
    17.85 美元　1 月 28 日 Wal-Mart 付费

17. Smith 家庭有一个 85 000 美元的年总收入，他们支付下面的账单：

    年纳税：19 550 美元
    月抵押：1850 美元
    信用卡 1：每月 320 美元

信用卡 2：每月 190 美元
个人贷款：每月 113 美元的双倍
百货商店记账：每月 65.00 美元
计算他们的债务限额.

18. 如果 Mitchell 家庭的财务报告如下，计算他们家庭的债务限额.
总资产，包括房产价值 380 000 美元：478 700 美元
短期负债：6700 美元
长期负债，包括抵押余额 298 000 美元：320 000 美元
19. Jane 花了 95 000 美元购买了她的首套住房，她付了 20%的首付，在 8%的利率期限 20 年筹措余款. 用公式法和表方法二者求月支付额.
20. 对一笔 110 000 美元的抵押贷款和 20 000 美元的首付以 10%的利率 25 年期限筹措，构造第一年的分期偿还表. 显示 5 列：支付号、月利息部分、月本金部分、月支付部分和余额.
21. 用 80 000 美元购买了一项财产共有权，附带一笔 12 000 美元的首付，年利率 9%期限 15 年. 计算支付 10 年后未付余额.
22. 如果利率升到 11%，支付 12 年后，练习 21 中共有财产权的市场价值将是多少？使用公式法和表方法计算.
23. 给定 Harry 以 14%的利率购买他的房子，并且已经做了 900 美元的月支付，如果剩余余额是 72 375.15 美元，留在 Harry 房子上的抵押支付是多少？
24. 在一份支付 12%年利率的偿债基金中，筹措 200 000 美金半年支付是多少？计算偿债基金的总存款额以及半年支付的所得利息.
25. 一家本地披萨店店主开另一家分店 5 年内需要 250 000 美金，他应该给公司获得 8%复合月利息的偿债基金存入多少钱？
26. Jack 以 8%利率 5 年借款 25 000 美元，他也开了一个支付 6%的偿债基金账户，他将为贷款利率付多少？为了按时还清贷款本金，他应该给偿债基金存多少额度存款？
27. 使用公式法和表方法二者计算存入偿债基金的季度存款，该偿债基金支付 7%利率、在 12 年内付清 400 000 美元的债务. 也计算以 8.5%贷款利息支付的情形.



单元四 Unit 4

资本预算和折旧

第 1 章　资本预算

第 2 章　折旧和损耗

第1章 资本预算

在商业世界做出的最关键的决策之一就是投资决策，即投资者必须选择最有投资价值的项目．看某项资本基金是否应该分配在下一项预算中作为指定投资项目，这是决策制定者的最高职责．给定许多不同领域的可选择的投资机会，比如与之相伴随的风险水平和获取将来投资回报的能力，投资者需仔细评估选择标准，并选择潜在的最大利益．资本支出是一项基金支出，公司将依赖它带来的足够回报覆盖和超过初始投资．因此，资本预算是一个评论、分析和选择项目的过程，这些项目在中期和长期运营中承诺能有最大回报．

在决定资本盈利能力方面，现金流分析最有帮助．现金流分析包括两种流动的估值和比较：现金流出量，主要由分配到一个投资项目的初始资本金和生产过程中贯穿于资产寿命的资本开支构成；现金流入量，主要由投资项目预期回报的估计构成．它们也包括某些生产性资产的折旧及其残值的折让．现金流出每月以现值度量，同时现金流入不得不从将来期限带回到现在，把它们贴现为公司的资本成本．对现金流分析至关重要的是诸如净现值、内部收益率、盈利能力指标和资本化成本等主要概念．在这一章我们聚焦这些概念，在下一章我们介绍资产的折旧和损耗．

1.1 净现值

净现值(NPV)作为一种分析方法，使用贴现现金流提供了一种决定一项投资如何盈利的工具．当贴现利率等于公司的边际资本成本的时候，净现值法把投资项目中所有资本支出的现值和从项目中预期回报的值进行比较．回想一下，将来回报(FV)的现值(CV)是

$$\mathrm{CV} = \frac{\mathrm{FV}}{(1+r)^n}$$

或者是用贴现因子乘以将来值(FV)：

$$\mathrm{CV} = \mathrm{FV}(1+r)^{-n}$$

再继续回顾，对于将来回报流，现值是

$$\mathrm{PV} = \sum \mathrm{FV}(1+r)^{-n}$$

因此，如果初始投资的资本支出(I_0)以其现值比较其将来回报的现值，结果将是净现值(NPV)：

$$\mathrm{NPV} = [\mathrm{FV}_1(1+r)^{-1} + \mathrm{FV}_2(1+r)^{-2} + \cdots + \mathrm{FV}_n(1+r)^{-n}] - I_0$$

$$\boxed{\mathrm{NPV} = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{FV}(1+r)^{-n} - I_0}$$

即在各种期限的多种回报．目的就是使将来的回报覆盖或者超过最初花在投资上的资本．于是，正的净现值(NPV≥0)表示一项充满盈利希望的投资，并且可能导致项目被批准和资本被分配．另一方面，负的净现值(NPV<0)表示资本花费的损失，很有可能导致投资建议被拒绝，阻止了下次预算中分配基金的任何企图．

例 1.1.1　一项快餐店扩张的建议计划需要 42 000 美元的初始资本投资，承诺下个 5 年每年投资回报将至少是 14 000 美元．如果有 10% 的资本成本，特许公司会批准该计划吗？

$$\begin{aligned}PV &= \sum_{n=1}^{5}\frac{FV_n}{(1+r)^n} = \frac{FV_1}{(1+r)^1}+\frac{FV_2}{(1+r)^2}+\frac{FV_3}{(1+r)^3}+\frac{FV_4}{(1+r)^4}+\frac{FV_5}{(1+r)^5}\\ &= \frac{\$14\,000}{(1+0.10)^1}+\frac{\$14\,000}{(1+0.10)^2}+\frac{\$14\,000}{(1+0.10)^3}+\frac{\$14\,000}{(1+0.10)^4}+\frac{\$14\,000}{(1+0.10)^5}\\ &= \$12\,727.27+\$11\,570.25+\$10\,518.41+\$9562.19+\$8692.90\\ &= \$53\,071.02\end{aligned}$$

我们也能用表方法得到现值：

$$PV = FV \cdot a_{\overline{n}|r}$$

其中 10% 利率、5 年期限交叉点的表值是 3.791.

$$PV = \$14\,000 a_{\overline{5}|0.10} = \$14\,000 \times 3.791 = \$53\,074$$

$$NPV = PV_{in} - I_0 = \$53\,072 - \$42\,000 = \$11\,072$$

作为一项有潜力的成功投资，特许管理机构将批准该项扩展项目.

例 1.1.2　一家建设公司的发展委员会正在研究两项投资建议，这是为了给下个四年做现金流的计划(见表 E1-1-2)．两个建议都要求 200 000 美元的资本配置，但是第一个计划的资本成本是 8%，第二个计划是 7.5%，两个计划中哪一个会被批准？

对计划Ⅰ：

$$\begin{aligned}PV &= \frac{\$35\,000}{(1+0.8)^1}+\frac{\$40\,000}{(1+0.8)^2}+\frac{\$50\,000}{(1+0.8)^3}+\frac{\$120\,000}{(1+0.8)^4}\\ &= \$32\,407.41+\$34\,293.55+\$39\,691.61+\$88\,208.58=\$194\,596.15\end{aligned}$$

表　E1-1-2

年份	现金流	
	计划Ⅰ：$r=8\%$	计划Ⅱ：$r=7.5\%$
1	35 000	40 000
2	40 000	40 000
3	50 000	95 000
4	120 000	100 000

由表值：

$$\begin{aligned}PV &= (\$35\,000\times 0.925\,925\,93)+(\$40\,000\times 0.857\,338\,82)\\ &\quad +(\$50\,000\times 0.793\,832\,24)+(\$120\,000\times 0.735\,029\,85)\\ &= \$194\,596.13\end{aligned}$$

$$NPV_{Ⅰ} = PV_{in} - I_0 = \$194\,596.15 - \$200\,000 = -\$5403.85$$

对计划Ⅱ：

$$PV = \frac{\$40\,000}{(1+0.075)^1}+\frac{\$40\,000}{(1+0.075)^2}+\frac{\$95\,000}{(1+0.075)^3}+\frac{\$100\,000}{(1+0.075)^4}$$

$$= \$37\,209.30 + \$34\,613.30 + \$76\,471.25 + \$74\,880.05$$
$$= \$223\,173.90$$

由表值：

$$\text{PV} = (\$40\,000 \times 0.930\,232\,56) + (\$40\,000 \times 0.865\,332\,61) + (\$95\,000 \times 0.804\,960\,57) + (\$100\,000 \times 0.748\,800\,53)$$
$$\text{PV} = \$223\,173.91$$
$$\text{NPV}_{\text{II}} = \$223\,173.90 - \$200\,000 = \$23\,173.90$$

计划Ⅰ将产生5403.85美元的损失；计划Ⅱ将得到23 173.90美元的正净值．计划Ⅰ将被拒绝，计划Ⅱ将被接受．

1.2 内部回报率

内部回报率(IRR)是帮助确定一项投资建议是不是值得的另一种方法．这种方法假设利用了建议计划希望获得的投资资本回报率．有时候内部回报率也称为**利润率**或者**投资边际效率**．它是一个现金流出量和流入量现值相等的比率．换句话说，它是净现值等于零的比率，因为在两种现金流的等式中没有差异．

$$\boxed{\text{NPV} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\text{FV}}{(1+\text{IRR})^n} - I_0 = 0}$$

主要的标准是内部回报率必须等于或大于公司要求的资本成本．利用现值求内部回报率的计算方法是很容易的，但传统上的计算方法是从数学实验和误差中找到的．可是，我们有一个方程可以至少得到对IRR的初始估计，其能用实验和误差不断修正以便达到比率的精确值．

$$\text{FV}_1(1+r)^{-1} + \text{FV}_2(1+r)^{-2} + \text{FV}_3(1+r)^{-3} + \cdots + \text{FV}_n(1+r)^{-n} - I_0 = 0$$

如果使用某一项的二项展开式，我们得到

$$\text{FV}_1(1-r) + \text{FV}_2(1-2r) + \text{FV}_3(1-3r) + \cdots + \text{FV}_n(1-nr) = I_0$$

把这些项加总：

$$\sum_{k=1}^{n} \text{FV}_k(1-kr) = I_0$$

整理等式左边的项：

$$\sum_{k=1}^{n} \text{FV}_k - \sum_{k=1}^{n} k \cdot \text{FV}_k r = I_0$$
$$\sum_{k=1}^{n} \text{FV}_k - I_0 = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \text{FV}_k r$$
$$\boxed{r = \frac{\sum_{k=1}^{n} \text{FV}_k - I_0}{\sum k\text{FV}_k}}$$

例 1.2.1 投资计划的一项建议要求15 000美元的初始资本．承诺在将来的5年回

报分别如下：3600 美元、4200 美元、5500 美元、6300 美元、7500 美元(见表 E1-2-1).
$n=5$；$FV_k=FV_1, FV_2, FV_3, FV_4, FV_5$；$I_0=12\ 000$ 美元．内部回报率将是多少？

$$\sum_{k=1}^{n} FV_k = \$3600 + \$4200 + \$5500 + \$6300 + \$7500 = \$27\ 100$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot FV_k = \$91\ 200$$

$$r = \frac{\sum_{k=1}^{n} FV_k - I_0}{\sum_{k=1}^{n} k \cdot FV_k} = \frac{\$27\ 100 - \$15\ 000}{\$91\ 200} = 13.27\%$$

表　E1-2-1

年份 k	FV_k	$k \cdot FV_k$
1	3600	3600
2	4200	8400
3	5500	16 500
4	6300	25 200
5	7500	37 500
Σ	27 100	91 200

这仅仅是内部回报率的初始估计，但是我们从公式知道，尽管它是一个粗糙的估计，但是它位于适当的范围．现在，我们以不同的比率计算 NPV，看看其值是不是更接近初始投资．用这种方式，经过多次试验后，我们能得到内部回报率(IRR)的精确值．

- 在 18%利率条件下，PV 将是

$$PV = \frac{\$3600}{(1+0.18)^1} + \frac{\$4200}{(1+0.18)^2} + \frac{\$5500}{(1+0.18)^3} + \frac{\$6300}{(1+0.18)^4} + \frac{\$7500}{(1+0.18)^5}$$
$$= \$3050.85 + \$3016.37 + \$3347.47 + \$3249.47 + \$3278.32$$
$$= \$15\ 942$$

- 在 20%利率条件下，PV 将是 15 151 美元．
- 在 20.4%利率条件下，PV 将是精确的 15 000 美元，精确地等于初始投资 15 000 美元．

$$PV - I_0 = 0$$
$$\$15\ 000 - \$15\ 000 = 0$$

1.3　盈利指数

不同于现金流入和流出之间零差异，这里 IRR 使差异不存在，评估新投资建议价值采用了另外的标准．第三种方法就是**盈利指数**(PI)，定义为初始投资回报现值的比率，换句话说，即流入现值对流出现值的比率．

$$\boxed{\mathrm{PI}=\frac{\mathrm{PV}_{ci}}{I_0}}$$

其中 PI 是盈利指数，PV_{ci} 是流入现金的现值，I_0 是初始投资．接受一个新投资建议的标准是 PI 至少等于或大于 1：$\mathrm{PI}\geqslant 1$.

例 1.3.1 在例 1.2.1 的计划Ⅰ中，现金流入量的现值计算为 194 596 美元，建议投资资本是 200 000 美元．如果我们依据盈利能力指数标准，PI 将被计算为

$$\mathrm{PI}=\frac{\mathrm{PV}_{ci}}{I_0}=\frac{\$\,194\,596}{\$\,200\,000}=0.97$$

由于 PI 小于 1，计划Ⅰ将被拒绝．如果我们计算计划Ⅱ的 PI，得到

$$\mathrm{PI}=\frac{\$\,223\,174}{\$\,200\,000}=1.12$$

因为 PI 大于 1，将接受计划Ⅱ.

1.4　资本化和资本化成本

基金(资产或债务)的**资本化**指无限次周期性支付的现值或现金等价物．例如，如果某项基金现在以某利率投资，我们可以假设将永无止境地连续获得周期性利息．因此，如果沿着这种逻辑的反面来看，我们就能意识到流动基金事实上是所有周期性支付被永远持有的现值．资本化过去常用来评估具有周期性支付的资产和债务的现金等价物的价值.

从成功的商业管理的角度来看，一家公司不但应该分配资金购买固定资产，而且应该分配额外的资金在固定资产的使用寿命期间维护它们，还应该安排投资在固定资产超出服务期限后替换它们．因此，一项资产的**资本化成本**(K)是以下成本的总和：

- 资产的原始成本 C
- 无限维护成本的现值：

$$\frac{(C-S)}{(1+r)^n-1}$$

- 无限次替换的现值 M/r：

$$\boxed{K=C+\frac{C-S}{(1+r)^n-1}+\frac{M}{r}}$$

其中 K 是一项资产的资本化成本，C 是资产的原始成本，S 是资产使用寿命过后的残值，M 是资产的年维护成本．资本化成本计算常常用在选择最经济的资产选项的决策之中.

例 1.4.1 一家建设公司正在关注重型设备的购买，决策者把选项限制在最好的两种机器，如表 1-4-1 所描述的情况．如果利率是 9.5%，两种机器中哪一种值得购买?

我们单独计算两种机器的资本化成本，选择成本最小者作为最优选项.

$$\begin{aligned}K_1&=C_1+\frac{C_1-S_1}{(1+r)^n-1}+\frac{M_1}{r}\\&=\$\,35\,000+\frac{\$\,35\,000-\$\,5000}{(1+0.095)^{10}-1}+\frac{\$\,3000}{0.095}=\$\,86\,873.52\end{aligned}$$

$$K_2 = C_2 + \frac{C_2 - S_2}{(1+r)^n - 1} + \frac{M_2}{r}$$
$$= \$39\,000 + \frac{\$39\,000 - \$4000}{(1+0.095)^{15} - 1} + \frac{\$2500}{0.095} = \$77\,379.25$$

机器Ⅱ基于最小资本化成本应该被购买.

表　E1-4-1

	机器Ⅰ	机器Ⅱ
原始成本($)	35 000	39 000
使用寿命(年)	10	15
年维护成本($)	3000	2500
残值($)	5000	4000

例 1.4.2　一家城镇董事会被要求评估一项修建儿童运动场的捐赠. 假设建设成本为50 000 美元，需要每 10 年予以替换，评估成本是 40 000 美元，并且维护成本是 15 000 美元. 如果利率是 12%，捐赠将是多少?

捐赠总额将被考虑为资本化成本，替换成本将是 $C-S$.

$$K = \$50\,000 + \frac{\$40\,000}{(1+0.12)^{10} - 1} + \frac{\$15\,000}{0.12} = \$193\,994.72$$

董事会将要求捐赠者分配 194 000 美元.

另一种资本化成本的应用就是决定提升层面的拓展，能够改善资产性能或提高设备生产率. 假设我们有一台打印机，原始成本是 65 000 美元，12 年后估计残值为 5000 美元. 机器生产率是每年 20 000 本书，维护成本是 3000 美元. 公司的工程师决定安装一个额外的配件，能够把机器的生产率提高到每年 30 000 本书，而不会影响到维护或使用寿命. 如果投资率是 8%，公司能节省多少钱达到提高生产率的目的?

这里我们能够设立一个比率方程：机器的资本化成本与技术改进前后的生产率的比率. 如果 K_b 和 K_a 是技术改进前后机器的资本化成本，P_b 和 P_a 是技术改进前后机器的生产率，那么

$$\frac{K_b}{P_b} = \frac{K_a}{P_a}$$

我们建立资本化成本遇到的问题(我们能花多少钱)，将是技术改进后资本化计算中对原始成本的增加项(x)，那么我们将用代数方法解 x.

$$K_b = C_b + \frac{C_b - S_b}{(1+r)^n - 1} + \frac{M_b}{r}$$
$$= \$65\,000 + \frac{\$65\,000 - \$5000}{(1+0.08)^{12} - 1} + \frac{\$3000}{0.08} = \$142\,021$$
$$K_a = C_a + \frac{C_a - S_a}{(1+r)^n - 1} + \frac{M_a}{r}$$

注意到 $C_a = C_b + x$，其中 x 就是应花在机器技术改进上的钱. $S_a = S_b$；且 $M_a = M_b$，

机器寿命和残值都不变. 那么,

$$K_a = (C_b + x) + \frac{C_b + x - S_b}{(1+r)^n - 1} + \frac{M_b}{r}$$

$$= (\$65\,000 + x) + \frac{\$65\,000 + x - \$5000}{(1+0.08)^{12} - 1} + \frac{\$3000}{0.08}$$

$$= \frac{\$227\,271 + 3x}{1.5}$$

$$\frac{K_b}{P_b} = \frac{K_a}{P_a}$$

$$\frac{\$142\,021}{20\,000} = \frac{(\$227\,271 + 3x)/1.5}{30\,000}$$

$$x = \$30\,758$$

公司能花 30 758 美元改进机器，提高其生产率到每年 30 000 本书.

1.5　其他资本预算的方法

判断资本支出的价值还有其他方法，这些方法不是基于货币的时间价值. 最常见的方法有以下两种.

平均回报率方法

在平均回报率方法下，使用预计数据对替代投资项目计算平均回报率(ARR). 评价公司对某种用作控制点的项目有自己可接受的最小平均回报率. 在公司下次预算中接受或拒绝某项分配资金的建议，是基于计算平均回报率如何满足公司已经建立的标准. 平均回报率用下面的公式得到:

$$\boxed{\text{ARR} = \frac{2 \cdot \text{APAT}}{C}}$$

这里 APAT 是税后平均利润，这是一个简单平均，用预计所得税后总利润除以整个项目寿命期(建议寿命的年数)计算. C 是建议初始资本. 公式中的 2 来自于 APAT 最初用平均投资去除，而平均投资则被定义为初始资本用 2 去除.

投资回收期方法

投资回收期方法考虑了回收周期，回收周期指一笔原始投资能够被收回的期限的年数. 如果计划流入的现金量是均匀的，回收期限用初始投资除以每年现金流入量计算. 但是，如果项目进行期间自始至终现金流入量是可变的，投资回收期将是无论什么年数都必须允许可变的现金流不断累积，直到初始投资被收回的年数. 当然，这将不同于均匀现金流情形结算方式下的回收期计算.

$$\boxed{\text{Payback} = \frac{C}{\text{YCI}}}$$

其中 C 是初始投资，YCI 是假设该年自始至终现金流入都均匀时的每年现金流入量.

例 1.5.1　考虑阳光公司如下两个项目的资本配置. 项目 X 要求 64 000 美元，项目 Y 要求 68 000 美元(见表 E1-5-1). 两个项目哪一个将获得公司的批准? 使用平均回报率方法和投资回收期方法计算.

$$APR_X=\frac{2\cdot APAT}{C}=\frac{2\times \$9000}{\$64\ 000}=28\%$$

$$APR_Y=\frac{2\times \$8900}{\$68\ 000}=26.2\%$$

$$Payback_X=\frac{C}{YCI}=\frac{\$64\ 000}{\$16\ 000}=4$$

表 E　1-5-1

年份	项目 X($ 64 000)		项目 Y($ 68 000)	
	预期利润(税后($))	现金流入量($)	预期利润(税后($))	现金流入量($)
1	9500	16 000	21 500	40 800
2	10 200	16 000	9000	12 200
3	10 200	16 000	5500	10 000
4	8000	16 000	4500	10 000
5	7100	16 000	4000	8000
	9000	16 000	8900	16 000

对 $Payback_Y$，初始投资 68 000 美元将用如下的方式回收：在前 3 年，回收 63 000 美元($ 40 800+ $ 12 200+ $ 10 000)，完成初始投资 68 000 美元，余额 5000 美元将在第四年回收. 因为第四年所得是 10 000 美元，我们可以假设 5000 美元将在该年年中回收. 这将使得回收期为 3.5 年. 决策将上升到评价公司和如何设置评价准则. 一般而言，因为使用了现金流入以及现金流入的时间，投资回收期方法更被许多商业决策者所喜欢. 回收资本花费越少的时间，投资无法获得回报的时间越少，不确定性的风险将越小. 这两种方法都没有直接考虑货币的时间价值，这是它们的主要瑕疵.

第2章　折旧和损耗

所有的资产(甚至某种程度上包括土地)在它能提供服务或回报的期间都有使用寿命.在正常环境下，一种资产提供有用和有意义产品的能力，趋向于在这个使用寿命期间逐渐递减，一直减到产品自身价值变得无关紧要的那个临界点.有些资产到达该点的时间要早一些，比如设备和建筑就是这样的情形，它们过早地磨损、发生故障或者刚好报废.在资产能力方面逐渐产生的损失被称为**折旧**.从成功的金融管理角度来看，资产在使用寿命期间产生的利润，对资产逐渐勾销的折旧予以了必要的补偿.从这种意义上来说，通过使用这些由资产在生产活动日累积的扣减，在一种资产折价“退休”的那个时刻，偿还这种资产的折旧价值是有相对可能的.在资产寿命从 C 到 S 的线性时间轴上(见图 2-1)，我们观察一项资产的价值及其变化.购买一项全新的资产时，它的价值就是 100%，并且等于原始成本(C)。在其使用寿命(n)期间，由于逐渐增加的折旧，其价值随之减小.在寿命的末期，这项资产将有一个剩余值或者残值(S)，要么等于零，要么减小到资产原始成本的最小百分数.在资产寿命期间，每个周期为一年，都有它自身的折旧部分(R_k)，其中 $0 \leqslant k \leqslant n$.随着时间一年又一年的流逝，这些折旧部分不断积累.所以，在一开始的时候，累积折旧(D_k)将是零($D_k=0$)；在资产寿命的末期，累积折旧将是全额($D_n=C-S$).在自始至终(n)的任意点，原始成本和累积折旧之间的差值就是账面价值(B_k)，它在这个点将被记录.所以，在这种情况下，一开始的账面价值恰好等于原始成本($B_0=C$)，并且在资产使用寿命的末期将降低到残值($B_n=S$).

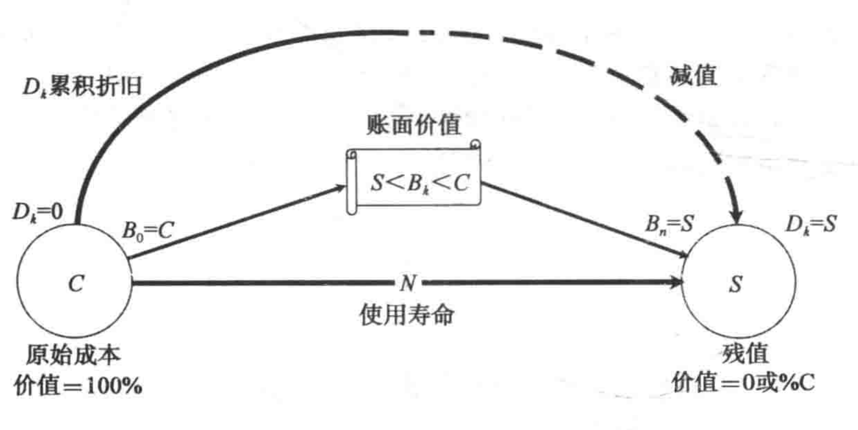


图　2-1

这里，值得一提的是账面价值可以不必等于资产的市场价值.内在地，记录随着支出已经被勾销掉的折旧部分是唯一必要的.在资产使用寿命的末期，账面价值将等同于残值.现在，最大的问题就是：折旧以什么比率发生？要解决每年注销多少折旧，如何做账？对于这个问题有多种观点，也有多种计算方法.有些方法考虑了资产寿命的折旧每年

以固定比率发生，有些方法使用了可变比率对资产进行折旧，也有另一些方法利用了复合利率技巧解决折旧比率. 下面将描述计算折旧的常用方法.

2.1 直线方法

直线方法是简单和直接的，对资产寿命的每一年，它都假设折旧以相等的额度发生，因此累积折旧均匀地分布在整个资产寿命区间上. 于是，在这种情形下，累积折旧(D_k)是年数(k)和折旧率(R)的简单乘积.

$$D_k = kR$$

其中每个 R 是

$$\boxed{R = \frac{C-S}{n}}$$

因此，得到账面价值 B_k：

$$B_k = C - D_k$$

$$B_k = C - kR$$

$$\boxed{B_k = C - \left(\frac{C-S}{n}\right)}$$

例 2.1.1 购买潜水设备花费 23 000 美元，具有 6 年的可用寿命，到期后预估价值是 8000 美元. 利用线性方法解出其全部折旧记录.

$C = \$23\ 000$；$S = \$8000$；$n = 6$(见图 E2-1-1 和表 E2-1-1).

$$R = \frac{C-S}{n} = \frac{\$23\ 000 - \$8000}{6} = \$2500$$

注意对机器和设备这些资产，折旧可能用产品的每个单位或运行的每个小时来表示，而不是通常使用的每年，这是很重要的变通. 在这种情形下，n 将被替换为产品(P)的单位个数或者运行的小时数(H).

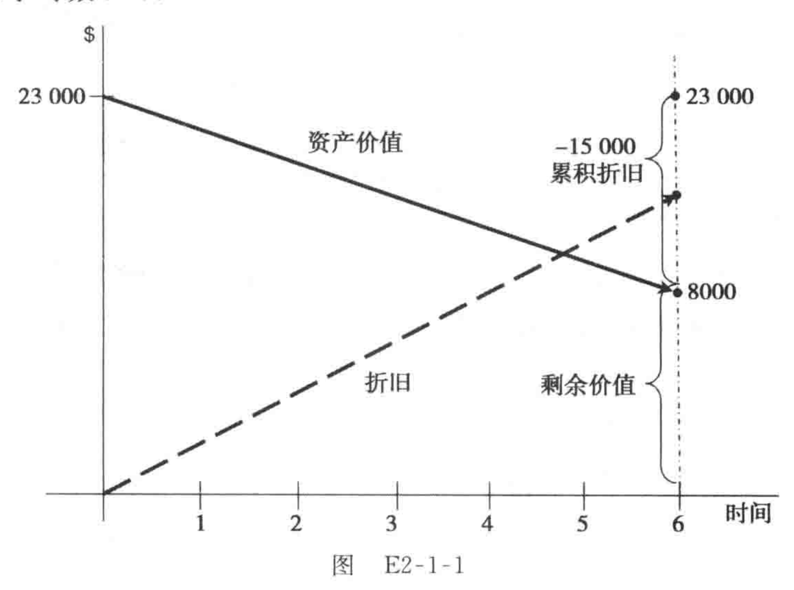


图　E2-1-1

表 E2-1-1

年份(末期) k	每年折旧 R($)	累积折旧 $D_k=kR$($)	账面价值 $B_k=C-D^k$($)
0	—	—	23 000
1	2500	2500	20 500
2	2500	5000	18 000
3	2500	7500	15 500
4	2500	10 000	13 000
5	2500	12 500	10 500
6	2500	15 000	8000

例 2.1.2 一台 64 000 美元购买的机器，总共生产了 100 000 个单位产品．4 年后机器“退休”时具有残值 9000 美元．4 年期间机器的生产能力如下(见表 E2-1-2)：

1 年：40 000 个单位

2 年：35 000 个单位

3 年：15 000 个单位

4 年：10 000 个单位

利用直线方法，考虑机器的生产能力，建立机器的折旧表．

$$R=\frac{C-S}{P}=\frac{\$64\ 000-\$9000}{100\ 000\text{ 个单位}}=\$0.55\quad\text{每单位产品折旧}$$

表 E2-1-2

年份(末期) k	每年生产量 AP(单位)	每年折旧 PR($)	累积折旧 D_p($)	账面价值 $C-D_p$($)
0	—	—	—	64 000
1	40 000	22 000	22 000	42 000
2	35 000	19 250	41 250	22 750
3	15 000	8250	49 500	14 500
4	10 000	5500	55 000	9000
	100 000	55 000		

例 2.1.3 一台复印机花费了 12 500 美元，总使用寿命有 15 000 工作小时，到期后它仍然值 3200 美元(见表 E2-1-3)．如果复印机每年使用 2500 小时，建立复印机的折旧表．

$$\text{使用寿命的年限}=15\ 000/2500=6\text{ 年}$$

$$R=\frac{C-S}{H}$$

$$R=\frac{\$12\ 500-\$3200}{15\ 000}=\$0.62\quad\text{每小时折旧}$$

表 E2-1-3

年份(末期) k	每年工作小时 AH	每年折旧 AH • R ($)	累积折旧 D_n($)	账面价值 $C-D_n$($)
0	—	—	—	12 500
1	2500	1550	1550	10 950
2	2500	1550	3100	9400
3	2500	1550	4650	7850
4	2500	1550	6200	6300
5	2500	1550	7750	4750
6	2500	1550	9300	3200
	15 000	9300		

2.2 固定比例方法

固定比例方法要求残值是正的．对于完全使用彻底、残值归零的资产，固定比例方法是不适用的．因为固定比例方法是递减比例方法之一，通常在资产寿命的早期年份折旧比较高，而在资产寿命的晚期年份折旧较低．假设折旧以固定百分数(d)产生，以致在任意年份的折旧(R_k)都是这年开头账面价值的常数比例，即等于前一年末期的账面价值(B_{k-1})．

$$R_k = d \cdot B_{k-1}$$

一项资产全部使用寿命的连续账面价值，将构成一个公比等于 $1-d$ 的等比数列，使得

$$B_k = C(1-d)^k$$

依据相同的逻辑，残值将为

$$S = C(1-d)^n$$

累积折旧(D_k)通常将等于原始成本(C)与任意点的账面价值的差：

$$D_k = C - B_k$$

$$D_k = C - C(1-d)^k$$

$$\boxed{D_k = C[1-(1-d)^k]}$$

例 2.2.1 对一台购买价为 12 600 美元的纺织机，如果每年折旧 35%，建立其前十年的折旧表(见表 E2-2-1)，使用公式按下列要求检验：

(a) 第四年的年折旧

(b) 第七年的累积折旧

(c) 第九年的账面价值

(d) 何时工厂能用 72 美元将这台机器销售到废料场?

(a) 第四年年折旧是 1211.09 美元：

$$R_k = d \cdot B_{k-1}$$

$$R_4 = d \cdot B_{4-1} = d \cdot B_3 = 0.35 \times (\$3460.27) = \$1211.09$$

(b) 第七年的累积折旧是 11 982.32 美元：

表　E2-2-1

年份	折旧 d(%)	每年折旧($)	累积折旧($)	账面价值($)
0	0	0	0	12 600.00
1	35	4410.00	4410.00	8190.00
2	35	2866.50	7276.50	5323.50
3	35	1863.23	9139.73	3460.27
4	35	1211.09	10 350.82	2249.18
5	35	787.21	11 138.03	1461.97
6	35	511.69	11 649.72	950.28
7	35	332.60	11 982.32	617.68
8	35	216.19	12 198.51	401.49
9	35	140.52	12 339.03	260.97
10	35	91.34	12 430.37	169.63

$$D_k = C[1-(1-d)^k] = \$12\,600 \times [1-(1-d)^k]$$
$$= \$12\,600 \times [1-(1-0.35)^7] = \$11\,982.32$$

(c) 第九年的账面价值是 260.97 美元：

$$B_k = C(1-d)^k$$
$$B_9 = \$12\,600 \times (1-0.35)^9 = \$260.97$$

(d) 如果残值是 72 美元，我们能求出 n：

$$S = C(1-d)^n$$
$$72 = \$12\,600 \times (1-0.35)^n = \$12\,600 \times (0.65)^n$$
$$\frac{72}{\$12\,600} = (0.65)^n$$
$$\log \frac{72}{\$12\,600} = n \log(0.65)$$
$$\frac{\log(72 \div \$12\,600)}{\log 0.65} = n$$
$$12 = n$$

所以，在机器寿命的第十二年末期，可以以 72 美元的残值销售.

例 2.2.2　一套以 25 000 美元购买的设备，10 年后有 3500 美元的残值，折旧的固定百分数(d)将是多少？

因为有 C，S，n，我们能使用

$$S = C(1-d)^n$$
$$\$3500 = \$25\,000(1-d)^{10}$$
$$\frac{\$3500}{\$25\,000} = (1-d)^{10}$$
$$0.14 = (1-d)^{10}$$
$$(0.14)^{1/10} = 1-d$$
$$d = 1-0.82$$
$$= 0.18 \quad 或 \quad 18\%$$

2.3　数位总和方法

数位总和方法的计算技巧类似于较早解释过的 78 规则方法. 该方法使用了一个分母是某些数字总和的分数，恰好就像 78 规则一样，在早期允许高利率收费，而在晚期则允许低利率缴费，数位总和法将使用一个折旧的递减比率，这里折旧的较高部分更早被抵销掉，折旧的较低部分则相对较晚被勾销掉. 每年的折旧率是一个分数，分母(dd)表示资产使用寿命年数(n)的总和. 分母(dd)由下式决定：

$$\boxed{dd = \frac{n(n+1)}{2}}$$

同时，对所有的年份分数的分子是逆序的年数，使得寿命从 n 到 1 排列时，年数则从 1 到 n 排列：

1	2	3	---→	$n-1$	$n-2$	n
n	$n-1$	$n-2$	←---	3	2	1

所以，第一年的折旧率(R_1)，第二年的折旧率(R_2)，……，直到资产寿命(n)最后一年的折价率(R_n)，用如下公式计算：

$$R_1 = \frac{n}{dd} \cdot D_n \quad \text{其中} \quad D_n = C - S$$

$$R_2 = \frac{n-1}{dd} \cdot D_n$$

$$R_3 = \frac{n-2}{dd} \cdot D_n$$

$$\vdots$$

$$R_{n-2} = \frac{3}{dd} \cdot D_n$$

$$R_{n-1} = \frac{2}{dd} \cdot D_n$$

$$R_n = \frac{1}{dd} \cdot D_n$$

我们一般能考虑一项资产使用寿命之内的任意年份(k)，计算其折旧份额如下：

$$R_k = \left[\frac{n-k+1}{dd}\right](C-S)$$

对于所有年份的全部折旧(D_n)，我们可以通过把 R_k 加总计算得到：

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} R_k = \frac{dd}{dd}(C-S)$$

$$D_n = \sum_{k=1}^{n} R_k = C - S$$

全部折旧(D_n)即是原始成本(C)与残值(S)的差.

例 2.3.1 一套设备系统花费 23 000 美元，预计使用寿命 8 年(见图 E2-3-1 和表 E2-3-1)，残值预计 4500 美元. 使用数位总和方法构建其折旧表.

$$D_n = C - S = \$23\,000 - \$4500 = \$18\,500$$

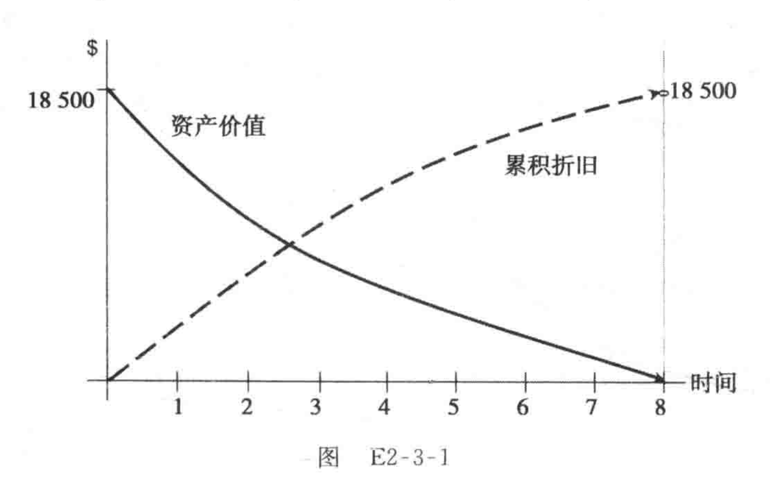


图 E2-3-1

表 E2-3-1

年份	折旧比例	每年折旧($)	累积折旧($)	账面价值($)
0	0	0	0	18 500.00
1	2/9	4111.11	4111.11	14 388.89
2	7/36	3597.22	7708.33	10 791.67
3	1/6	3083.33	10 791.66	7708.34
4	5/36	2569.44	13 161.10	5138.90
5	1/9	2055.55	15 416.65	3083.35
6	1/12	1541.66	16 958.31	1541.69
7	1/18	1027.77	17 986.08	513.92
8	1/36	513.92	18 500.00	0

$$dd = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{8(8+1)}{2} = 36$$

$$R_1 = \frac{n}{dd} \cdot D_n = \frac{8}{36}(\$18\,500) = \$411.11 \tag{1}$$

$$R_2 = \frac{n-1}{dd} \cdot D_n = \frac{8-1}{36}(\$18\,500) = \$3597.22 \tag{2}$$

$$R_3 = \frac{n-2}{dd} \cdot D_n = \frac{8-2}{36}(\$18\,500) = \$3083.22 \tag{3}$$

$$R_4 = \frac{n-3}{dd} \cdot D_n = \frac{8-3}{36}(\$18\,500) = \$2569.44 \tag{4}$$

$$R_5 = \frac{n-4}{dd} \cdot D_n = \frac{8-4}{36}(\$18\,500) = \$2055.55 \tag{5}$$

$$R_6 = \frac{n-5}{dd} \cdot D_n = \frac{8-5}{36}(\$18\,500) = \$1541.66 \tag{6}$$

$$R_7 = \frac{n-6}{dd} \cdot D_n = \frac{8-6}{36}(\$18\,500) = \$1027.77 \tag{7}$$

$$R_8 = \frac{n-7}{dd} \cdot D_n = \frac{8-7}{36}(\$18\,500) = \$513.88 \tag{8}$$

2.4　分期偿还方法

分期偿还方法通过分期偿还折旧费考虑了货币的时间价值，使得每年的费用不但包括了资产成本的一定份额，而且包括了每个折旧年份账面价值的利息．在资产寿命期间全部的折旧将被当作普通年金的现值来处理，该年金的年支付表示为年折旧费．在这种情形下，全部折旧(D_n)的现值就是原始成本与贴现残值二者之间的差值，即 $D_n = C - S(1+r)^{-n}$，其中 n 是资产的使用寿命．当给定一项基金的现值时，我们来回顾一下普通年金的支付公式：

$$A = \frac{\mathrm{CV} \cdot r}{1-(1+r)^{-n}}$$

并且，等价表公式是

$$A = \mathrm{CV} \cdot \frac{1}{a_{\overline{n|}r}}$$

现在，我们能用周期折旧津贴(D_k)替换年金周期支付(A)，我们也能用全部折旧(D_n)替换年金基金的现值(CV)．给定 $D_n = C - S(1+r)^{-n}$，我们能得到

$$\boxed{D_k = \frac{[C - S(1+r)^{-n}]r}{1-(1+r)^{-n}}}$$

对于表公式，我们能得到

$$\boxed{D_k = C - S(1+r)^{-n} \cdot \frac{1}{a_{\overline{n|}r}}}$$

例 2.4.1　一台花费 27 000 美元的机器有 10 年使用寿命期，并且最终的残值为 2000 美元(见表 E2-4-1)．使用分期偿还方法计算年折旧费，如果投资利率是 8.5%，构造全部折旧表．

C=27 000 美元；S=2000 美元；n=10 年；r=0.085．

$$D_k = \frac{[C - S(1+r)^{-n}]r}{1-(1+r)^{-n}}$$

$$= \frac{[\$27\,000 - \$2000(1+0.085)^{-10}]0.085}{1-(1+0.085)^{-10}} = \$3980.20$$

由表方法：

$$D_k = C - S(1+r)^{-n} \cdot \frac{1}{a_{\overline{n|}r}}$$

$$= \$27\,000 - \$2000(1+0.085)^{-10} \cdot \frac{1}{a_{\overline{10|}0.085}}$$

$$= \$26\,115.43 \times 0.152\,407\,71 = \$3980.20$$

注意，(2)列年折旧数字包括了实际折旧费的利息，当在(4)列出现的时候，它们则是作为折旧本金或者净折旧津贴的，已经除去利息部分了.

表　E2-4-1

(1)年份 k	(2)每年折旧 D_k	(3)折旧利息 [(6)×r]	(4)折旧本金 [(2)－(3)]	(5)累积折旧 [来自(4)]	(6)账面价值 [C－(5)]
0	—	—	—	—	27 000.00
1	3980.20	2295.00	1685.20	1685.20	25 314.80
2	3980.20	2151.76	1828.44	3513.64	23 486.36
3	3980.20	1996.34	1983.86	5497.50	21 502.50
4	3980.20	1827.71	2152.49	7649.99	19 350.01
5	3980.20	1644.75	2335.45	9985.44	17 014.56
6	3980.20	1446.24	2533.96	12 519.40	14 480.60
7	3980.20	1230.85	2749.35	15 268.75	11 731.25
8	3980.20	997.16	2983.40	18 251.79	8748.21
9	3980.20	743.60	3236.60	21 488.39	5511.61
10	3980.20	486.49	3511.71	25 000.00	2000.00
	39 802.00	14 802.00	25 000.00		

2.5　偿债基金方法

在偿债基金方法下，折旧被处理为一项偿债基金，为了便于在资产寿命的末期替换它，偿债基金要累积足够的基金. 在这种情形下，折旧费扮演了用所得利息给偿债基金存款的角色. 计算折旧费的方法和计算将来值已知的普通年金支付方法一样. 在这种情形下，将来值将是折旧的全部数额($C-S$).

当将来值是已知的时候，让我们回顾普通年金支付的公式：

$$A=\frac{\mathrm{FV}\cdot r}{(1+r)^n-1}$$

如果使用表值，公式将为

$$A=\frac{\mathrm{FV}}{S_{\overline{n}|r}}$$

现在，让我们用年折旧(R_k)替换年金支付(A)，并用整个资产寿命的折旧($C-S$)替换年金将来值(FV)：

$$\boxed{R_k=\frac{(C-S)r}{(1+r)^n-1}}$$

如果使用表值，公式则为

$$\boxed{R_k=\frac{C-S}{S_{\overline{n}|r}}}$$

现在，资产使用寿命期间或者在(k)年末任意点的累积折旧(D_k)将等于相同时间周期的偿债基金的累积值. 因此，D_k 将是

$$\boxed{D_k=R_k\left[\frac{(1+r)^k-1}{r}\right]}$$

如果使用了表值，公式将是

$$\boxed{D_k = R_k \cdot S_{\overline{k}|r}}$$

替换 R_k，我们得到

$$\boxed{D_k = \frac{C-S}{S_{\overline{n}|r}} \cdot S_{\overline{k}|r}}$$

注意到如果 R_k 不是已经计算好的，并且如果使用了上述第二个公式，将有两个表值：$S_{\overline{n}|r}$ 和 $S_{\overline{k}|r}$.

例 2.5.1　使用偿债基金方法计算折旧费，一座价值 20 000 美元的建筑物，其 8 年后价值就减到了 4000 美元，给定投资利率是 7%(见表 E2-5-1)，构造该建筑物的整个折旧表.

$$R_k = \frac{(C-S)r}{(1+r)^n - 1} = \frac{(\$20\,000 - \$4000) \times 0.07}{(1+0.07)^8 - 1} = \$1559.48$$

或者

$$R_k = \frac{C-S}{S_{\overline{n}|r}} = \frac{\$20\,000 - \$4000}{S_{\overline{8}|0.7}} = \frac{\$16\,000}{10.259\,802\,57} = \$1559.48$$

表　E2-5-1[a]

(1)年份 k	(2)偿债基金存款 R_k	(3)利息 [(5)×0.7]	(4)每年折旧 [(2)+(3)]	(5)累积折旧 [来自 (4)]	(6)账面价值 [$C-S$]
0	—	—	—	—	20 000.00
1	1559.48	—	1559.48	1559.48	18 440.52
2	1559.48	109.16	1668.64	3228.12	16 771.88
3	1559.48	225.97	1785.45	5013.57	14 986.43
4	1559.48	350.95	1910.43	6923.99	13 076.00
5	1559.48	484.68	2044.16	8968.15	11 031.85
6	1559.48	627.77	2187.25	11 155.40	8844.60
7	1559.48	780.88	2340.36	13 495.76	6504.24
8	1559.48	944.70	2504.18	16 000.00	4000.00
	12 475.84	3524.16	16 000.00		

[a] 某些最终入账将取整.

2.6　综合率和综合年限

在现实中，公司处理各种类型的多种资产. 一种处理资产折旧的有用方法，就是计算资产以相同的类型和接近的种类被分组的集体折旧. 综合率方法能帮助计算某类资产组的折旧费. **综合率**能用一组资产的年折旧总额除以这些资产的原始成本组合得到. 给定用直线法计算的个体折旧费：

$$R_{\text{comp}} = \frac{\sum_{k=1}^{m} R_k}{\sum_{k=1}^{m} C_k}$$

其中 $k=1, 2, 3, \cdots, m$，这里 m 是组中的资产数目.

例 2.6.1 表 E2-6-1 显示了相同种类的 5 件设备的折旧信息. 求对总折旧的综合率.

$$R_{\text{comp}} = \frac{\sum_{k=1}^{m} R_k}{\sum_{k=1}^{m} C_k} \quad m = 5$$

$$= \frac{\$20\ 700}{\$176\ 000} = 11.79\%$$

如果能够改变资产价值的条件和环境没有显著的变化，综合率方法将使得把比率应用到下一年相同资产组更容易. 例如，我们假设由于该年期间产生了次要的额外成本，该组资产的原始价值变成 176 500 美元，11.79%的利率仍然能被有效地应用，该组的折旧费将是

$$\$176\ 500 \times 0.1179 = \$20\ 809$$

这是相当接近当前 20 750 美元的折旧费的.

表 E2-6-1

(1) 设备编号	(2)原始成本 C_k($)	(3)使用寿命 (年)	(4)残值 ($)	(5)每年折旧 R_k ($)	(6)总折旧 W_k ($)
1	20 000	5	2000	3600	18 000
2	23 000	6	2000	3500	21 000
3	37 000	8	3000	4250	34 000
4	41 000	8	5000	4500	36 000
5	55 000	10	6000	4900	49 000
	176 000	37	18 000	20 750	158 000

另外一个折旧的综合度量就是**综合年限**，指一个资产组的平均有用寿命. 可是，综合年限不是用年数的简单平均来计算. 计算综合年限依赖于得到年折旧费所使用的方法. 如果由于使用了直线方法，折旧费是相等的，综合年限(L_{comp})将用总折旧费或磨损值($\sum W_i$)除以年折旧费总额($\sum R_i$)得到.

$$L_{\text{comp}} = \frac{\sum_{k=1}^{m} W_k}{\sum_{k=1}^{m} R_k}$$

但是，如果由于使用了偿债基金方法，年折旧费是可变的，那么综合年限将等于偿债基金年存款总额所需时间与这些资产整个组折旧总额所需期限的比．那么，问题变成了求年金公式的 n，其中资产组的偿债基金存款总和($\sum R_i$)是支付(A)，并且总折旧费($\sum W_i$)将是将来值(FV)．所以，期限公式

$$n=\frac{\ln\left[\frac{\mathrm{FV}\cdot r}{A}+1\right]}{\ln(1+r)}$$

将是

$$n=\frac{\ln\left[\frac{(\sum W_k)r}{\sum R_k}+1\right]}{\ln(1+r)}$$

例 2.6.2　计算例 2.6.1 中的综合年限．最后列(6)的总计即所有 5 件设备的总折旧是总和损耗值$\sum W_i$．(5)列的总计是所有设备年折旧的总和．

$$L_{\mathrm{comp}}=\frac{\sum_{k=1}^{5}W_k}{\sum_{k=1}^{5}R_k}=\frac{\$158\,000}{\$20\,750}=7.6\text{ 年}$$

例 2.6.3　把偿债基金方法用在例 2.6.2 中的设备上，如果投资利率是 6%，计算综合年限．

首先，我们得计算 5 种折旧存款 R_i，使用表方法：

$$R_k=\frac{C-S}{S_{\overline{n}|r}}$$

$$R_1=\frac{\$20\,000-\$2000}{S_{\overline{5}|0.06}}=\frac{\$18\,000}{5.637\,092\,96}=\$3193.14$$

$$R_2=\frac{\$23\,000-\$2000}{S_{\overline{6}|0.06}}=\frac{\$21\,000}{9.975\,318\,54}=\$3010.62$$

$$R_3=\frac{\$37\,000-\$3000}{S_{\overline{8}|0.06}}=\frac{\$18\,000}{9.897\,467\,91}=\$3435.22$$

$$R_4=\frac{\$41\,000-\$5000}{S_{\overline{8}|0.06}}=\frac{\$34\,000}{9.897\,467\,91}=\$3637.29$$

$$R_5=\frac{\$55\,000-\$6000}{S_{\overline{10}|0.06}}=\frac{\$49\,000}{13.180\,794\,94}=\$3717.53$$

$$\sum_{k=1}^{5}R_k=\$16\,993.80$$

从表 E2-6-1 中可知，$\sum_{k=1}^{5}W_k$ 为 158 000 美元，我们可以应用 n 公式：

$$L_{\mathrm{comp}}=n=\frac{\ln\{[(\sum W_k)\cdot r/\sum R_k]+1\}}{\ln(1+r)}$$

$$n=\frac{\ln\{[(\$158\ 000)\times 0.06/\$16\ 993.80]+1\}}{\ln(1+0.06)}=7.6\ 年$$

2.7 损耗

自然资源作为金融资产，通过其贮备能力的逐渐使用以及系统使用得以慢慢完成折旧. 典型的例子是石油和天然气、矿产和木料资源. 正如我们所看到的，折旧包含了由于资产寿命期间生产产品所造成的生产型损耗，移动和使用自然资源也是类似的概念，称为**损耗**.

而且，当生产型资产使用寿命结束后，产生的折旧费代替了生产型资产，来自于任意遭到损耗的自然资源的净年收入必须用年损耗的津贴来折旧. 计算损耗和计算折旧是相似的，都用生产单位表示. 所以，计算每个单位的损耗率，并且乘以一年期间生产的单位数就得到了年损耗.

$$\boxed{\mathrm{DP}=\frac{C-S}{P}}$$

其中 DP 是产品每个单位的损耗率，P 是总产量.

例 2.7.1　购买一家采砾场需要 40 000 美元，挖掘后其价值评估在 4000 美元(见表 E2-7-1). 在 5 年内矿场有能力得到至少 90 000 卡车载荷的矿产，每年分别为 15 000、21 000、20 000、18 000 和 16 000 卡车载荷，之后矿产资源被耗尽. 构造损耗表.

$$\mathrm{DP}=\frac{C-S}{P}=\frac{\$40\ 000-\$4000}{90\ 000}=0.40\quad 每卡车载荷损耗$$

表　E2-7-1

(1)年份	(2)年生产量 AP	(3)每年损耗 [(2)×DP]	(4)累积损耗 [来自(3)]	(5)账面价值 [C−(4)]
1	—	—	—	40 000
2	15 000	6000	6000	34 000
3	21 000	8400	14 400	25 600
4	20 000	8000	22 400	17 600
5	18 000	7200	29 600	10 500
	16 000	6400	36 000	4000

损耗也能使用偿债基金技巧重新获得. 如果在损耗资源投资的某个人，想恢复已经被损耗后的资源价值，他可以从资源年收益中留出一部分，并且存入偿债基金去累积，直到损耗时刻累计数额能够恢复已经损耗资源的原始价值. 在这种情形下，他的净年收入(NI)将等于损耗前的收入(I)减去存入偿债基金的钱(R_k).

$$\mathrm{NI}=I-R_k$$

我们也可以整理公式为

$$I=\mathrm{NI}+R_k$$

$$I = \mathrm{NI} + \frac{C-S}{S_{\overline{n}|i}}$$

因为 NI 能用原始成本(C)乘以利润率(r)来得到，我们把其代入：

$$\boxed{I = C(r) + \frac{C-S}{S_{\overline{n}|i}}}$$

注意 r 是利润率，i 是偿债基金的投资率.

如果资源被完全损耗到没有残值的那个点，上述公式将变成

$$I = C(r) + \frac{C}{S_{\overline{n}|i}}$$

$$\boxed{I = C\left(r + \frac{1}{S_{\overline{n}|i}}\right)}$$

例 2.7.2　一处消耗型资源有 450 000 美元的初始成本，以及 22 000 美元的残值. 它能产生 324 000 吨原材料，第一年生产 40 000 吨. 假设原材料以和第一年相同的比率继续生产，偿债基金以 7.5%的利率重新恢复资源.

(a) 求第一年的损耗费.

(b) 计算产生 14%的收益率的年收入.

(a) 每吨损耗率

$$\mathrm{DP} = \frac{\$450\ 000 - \$22\ 000}{324\ 000\ \text{吨}} = \$1.32\quad \text{每吨损耗率}$$

$$D_{\text{第1年}} = 40\ 000\ \text{吨} \times \$1.32 = \$52\ 800$$

$$\text{有用寿命} = \frac{324\ 000\ \text{吨}}{40\ 000\ \text{吨}} = 8\ \text{年}$$

(b)

$$\begin{aligned} I &= C(r) + \frac{C-S}{S_{\overline{n}|i}} \\ &= \$450\ 000(0.14) + \frac{\$450\ 000 - \$22\ 000}{S_{\overline{8}|0.075}} \\ &= 63\ 000 + \frac{\$428\ 000}{10.446\ 371\ 01} \\ &= \$103\ 971 \end{aligned}$$

单元四附录

小结

投资者必须有一个做投资决策的坚实基础，而投资公司经常得到关于新项目的过多投资建议，他们没法把钱投入每个听起来很有希望的项目．那么，事情就变成了投资者应该依照什么标准帮助他们预算资本，并且保证合理程度的盈利能力．在这个单元，为了评估一项投资的潜在价值，我们讨论了三种主要技巧．第一是净现值，比较投入的投资和预期现金流入贴现．第二种分析技巧是内部回报率，使预期回报的现值和初始投资相等．第三种技巧是盈利指数，是基于现金流入的现值对现金流出的比率．

接下来我们讨论了资本化以及资本化成本，这些关系到保持资本投资贯穿其使用寿命的需求，并且当资产的有用寿命一结束就立刻替换它们．这种思想引出了折旧和损耗的概念，以及评估和计算折旧费的各种方法．我们详细描述了直线方法，以及用产品单位或运行小时表示折旧的各种类型．也评论了固定比例方法、数位总和方法、分期偿还方法和偿债基金方法．然后，我们讨论综合率和在相同时刻处理多种资产的综合年限．一个相关的主题就是损耗性资产折旧的特殊领域，针对的是能够通过成分的逐渐转移完全被使用的资源．在资本预算部分，我们还讨论了没有使用货币的时间价值的资产预算方法：平均回报率方法和投资回收期方法．

公式列表

净现值

$$\mathrm{NPV}=\sum_{n=1}^{N}\mathrm{FV}(1+r)^{-n}-I_0$$

内部回报率

$$\mathrm{NPV}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\mathrm{FV}}{(1+\mathrm{IRR})^n}-I_0=0$$

$$r=\frac{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{FV}_k-I_0}{\sum_{k=1}^{n}k\cdot\mathrm{FV}_k}\quad \text{IRR 的粗糙估计}$$

盈利指数

$$\mathrm{PI}=\frac{\mathrm{PV}_{ci}}{I_0}$$

资本化成本

$$K=C+\frac{C-S}{(n+r)^n-1}+\frac{M}{r}$$

$$\frac{K_b}{P_b}=\frac{K_a}{P_a}$$

折旧

直线方法

$$D_k=kR$$

$$R=\frac{C-S}{n}$$

$$B_k=C-D_k$$

$$B_k=C-kR$$

$$B_k=C-\frac{C-S}{n}.$$

固定比例方法

$$R_k = d \cdot B_{k-1}$$
$$B_k = C(1-d)^k$$
$$S = C(1-d)^n$$
$$D_k = C - B_k$$
$$D_k = C[1-(1-d)^k]$$

数位总和方法

$$dd = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$R_1 = \frac{n}{dd} \cdot D_n$$
$$R_2 = \frac{n-1}{dd} \cdot D_n$$
$$R_3 = \frac{n-2}{dd} \cdot D_n$$
$$\vdots$$
$$R_{n-2} = \frac{3}{dd} \cdot D_n$$
$$R_{n-1} = \frac{2}{dd} \cdot D_n$$
$$R_n = \frac{1}{dd} \cdot D_n$$
$$R_k = \frac{n-k+1}{dd} \cdot D_n$$
$$D_n = \sum R_k = C - S$$

分期偿还方法

$$D_k = \frac{[C - S(1+r)^{-n}]r}{1-(1+r)^{-n}}$$
$$D_k = C - S(1+r)^{-n} \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|r}}$$

偿债基金方法

$$R_k = \frac{(C-S)r}{(1+r)^n - 1}$$
$$R_k = \frac{C-S}{S_{\overline{n}|r}}$$
$$D_k = R_k\left[\frac{(1+r)^k - 1}{r}\right]$$
$$D_k = R_k \cdot S_{\overline{k}|r}$$
$$D_k = \frac{C-S}{S_{\overline{n}|r}} \cdot S_{\overline{k}|r}$$

综合率

$$R_{\text{comp}} = \frac{\sum_{k=1}^{m} R_k}{\sum_{k=1}^{m} C_k}$$

综合年限

$$R_{\text{comp}} = \frac{\sum_{k=1}^{m} W_k}{\sum_{k=1}^{m} R_k}$$
$$n = \frac{\ln\left[\frac{(\sum W_k)r}{\sum R_k} + 1\right]}{\ln(1+r)}$$

损耗

$$\text{DP} = \frac{C-S}{P}$$
$$I = C(r) + \frac{C-S}{S_{\overline{n}|i}}$$
$$I = C\left(r + \frac{1}{S_{\overline{n}|i}}\right)$$

其他资本预算方法

平均回报率

$$\text{ARR} = \frac{2 \cdot \text{APAT}}{C}$$

资本回收期

$$\text{Payback} = \frac{C}{\text{YCI}}$$

习题

1. 一项计划建议声称它将在未来 3 年在年回报上提供至少 20 000 美元，但是要求 50 000 美元的初始投资. 如果资本成本是 8%，该计划值得批准吗？
2. 一个项目在运营的前 4 年，将得到 25 000 美元、35 000 美元、30 000 美元和 40 000 美元，如果利率是 9.5%，初始投资是 80 000 美元，求该项目的现值.

3. 当资本成本是 6.5%的时候，一家资本预算委员会从下面两个项目选择哪一个值得投入 150 000 美元？

年份：	1	2	3	4	5
项目收益Ⅰ($)	30 333	55 000	62 000	69 000	73 000
项目收益Ⅱ($)	80 000	71 000	65 000	53 000	32 000

4. 一个项目要求 250 000 美元的投资，该项目承诺在第一年提供 85 000 美元，第二年 70 000 美元，第三年 100 000 美元，求这个项目的内部回报率.
5. 一个投资者计划两笔投资——现在投资 20 000 美元，明年投资 20 000 美元，并计划从这两笔投资中今年获利 15 000 美元，明年获利 30 000 美元，内部回报率是多少？
6. 一个初始投资为 430 000 美元的项目，当前现金流价值是 500 000 美元，求盈利能力指数.
7. 如果一家专营店预计所开分店的现金流的现值是 320 000 美元，资本要求是 405 000 美元，这家专营店的总部应该拒绝还是接受开这家新店的计划？
8. 一家初创景观公司不得不决定在新卡车和割草机上更加谨慎地投资. 他们把自己的选择限定到两个集合. 给定货币价值 7.25%，哪个集合是最好的？

需要的资本	集合Ⅰ	集合Ⅱ
原始成本($)	68 000	65 000
使用寿命(年)	12	11
维护费用($)	5000	4500
残值($)	7000	6000

9. 一台机器有 65 000 美元的价值，预计运行 6 年，结束时具有 7000 美元残值，使用直线方法构造一个折旧表.
10. 办公室的一架机械装置将花 23 000 美元，它的使用寿命是 4 年，之后不得不搬走并扔掉，但是搬走成本将是 1200 美元. 使用直线方法准备一份折旧表.
11. 一台花费了 65 000 美元的机器将在 10 年内折旧到 5000 美元. 计算机器第六年末期的账面价值，使用固定比例方法计算第七年的折旧支出.
12. 一台价值 35 000 美元的设备，如果它通常在 14 年内折旧到 5000 美元，折旧到低于原始价值的一半还要花多久时间？使用固定比例方法计算.
13. 一笔资产有 44 000 美元的价值，使用寿命 9 年后有 6500 美元的残值. 使用数位总和方法建立一张折旧表.
14. 一台设备花费 72 000 美元，它的使用寿命预计 15 年，之后将被宣布具有 6500 美元残存价值. 构造一份折旧表，并使用数位总和方法计算第 10 年末期的账面价值.
15. 使用分期偿还方法，对一台价值 22 000 美元、具有 7 年使用寿命和 3450 美元残值的机器构造折旧表(利率是 9%).
16. 一笔资产有 1500 美元价值和 5 年使用寿命. 折合价是 300 美元，假设利率是 5%，使

用分期偿还方法构造一张折旧表.

17. 使用偿债基金方法，假设利率是 8%，一份资产价值 42 000 美元，5 年内下降到 4300 美元，准备一份折旧表.
18. 一家本地公司的设备花费 500 000 美元，年折旧预计为 85 000 美元，求该设备的综合折旧率.
19. 对下面的资产组使用折旧的直线方法，计算综合率和综合年限.

资产	原始成本($)	残值($)	使用寿命(年)
1	2600	200	4
2	3800	450	12
3	6400	380	11
4	5750	590	8
5	8100	1200	10

20. 假设利率是 6.5%，使用折旧的偿债基金方法计算习题 19 中资产组的综合年限.
21. 基于 200 000 吨煤炭储量的预估，以 380 000 美元购买一家本地煤矿. 运营的第一年，煤矿生产储量的四分之一. 给定土地的残值为 10 000 美元，计算总损耗和第一年损耗扣减.
22. 对花费 780 000 美元购买的一座油田，在 5 年之内承诺产生 25 000、40 000、55 000、45 000和 35 000 桶油，之后油田的残值估计在 12 000 美元，构造一份油田的损耗表.
23. 两份投资建议被提交等待批准，每个初始投资都是 25 000 美元. 它们税后预估的盈利是：

年份	建议 1($)	建议 2($)
1	2500	6000
2	3300	4900
3	4000	4200
4	5200	3150
5	6100	2000

使用平均回报率方法，做一份资本预算决策.

24. 假设资产分配的另两份建议被提交，它们有下面的现金流入：

年份	建议 1($)	建议 2($)
1	10 000	5500
2	10 500	5500
3	4200	5500
4	1900	5500
5	1580	5500

如果两个计划都要求 25 000 美元的初始投资，基于投资回收期标准做一份资本预算决策.



单元五 Unit 5

盈亏平衡点和杠杆作用

第 1 章　盈亏平衡分析

第 2 章　杠杆效应

第1章　盈亏平衡分析

对商业运营来说，也对利用成本和利润之间的基本关系调整的盈利计划而言，盈亏平衡分析是一个重要的技术工具. 盈亏平衡分析也被称为本量利(Cost-Volume-Profit，CVP)分析，当开始获利时，它提供给商业计划者或管理者一个貌似真实的接近点，这个点发生在生产总成本已经被产品销售的收益所重新恢复的那个阶段. 因此，**盈亏平衡分析**(break-even analysis)既是一个决定生产产量的过程，也是一个决定实现利润之前销售的过程. 盈亏平衡分析还可以在获得任意利润之前测定能够积累的收益额. 如果公司生产和销售多种产品，那么估计收益而不是产品规模是更加实际和方便的. 例如，通用汽车在工厂开始获利之前，就能很容易地确定应该销售多少辆雪佛兰美宜堡，但这种方法不可能轻易被沃尔玛使用，因为沃尔玛店销售成千上万种商品.

在技术上，盈亏平衡分析就是找生产量的盈亏平衡和销售收益的盈亏平衡两者接近的那个点. **盈亏平衡点**(Break-Even Point，BEP)即在这个点利润将为零，总成本将等于总收益. 从几何上，盈亏平衡点是总成本和总收益之间的交叉点. 一旦找到这个点，我们将知道这个点之前所有生产产生的损失，我们也将知道任何已经生产的产品以及这个点之后销售所得利润.

1.1　衍生的盈亏平衡产量和盈亏平衡收益

如果总成本(C)包括了固定成本(FC)和可变成本(VC)，那么

$$C = \mathrm{FV} + \mathrm{VC}$$

因为可变成本随着生产量而变化，我们考虑 v 作为每个生产单位的可变成本，如果生产量是 Q，那么

$$\mathrm{VC} = vQ \quad 和 \quad C = \mathrm{FV} + vQ \tag{1}$$

收益(R)也将依赖于产品销售了多少个单位. 如果我们考虑 p 作为产品每个单位的价格，那么

$$R = pQ \tag{2}$$

利润(Pr)有时也称营业利润或者息税前利润(EBIT)，是总收益和总成本之差：

$$\mathrm{Pr} = R - C = pQ - (\mathrm{FV} + vQ) = pQ - \mathrm{FV} - vQ = Q(p-v) - \mathrm{FC} \tag{3}$$

因为在盈亏平衡点利润为零，

$$0 = Q(p-v) - \mathrm{FC}$$

$$Q(p-v) = \mathrm{FC}$$

$$Q = \frac{\mathrm{FC}}{p-v}$$

这个 Q 就是盈亏平衡点的生产量，被称为**盈亏平衡产量**(BEQ)：

$$\boxed{\mathrm{BEQ} = \frac{\mathrm{FC}}{p-v}}$$

其中 FC 是固定运营成本，p 是产品每个单位的价格，v 是每个生产单位的可变运营成本.

类似地，我们能找到在盈亏平衡点的收益.

我们从方程(3)开始：

$$\text{Pr} = R - C = R - (\text{FC} + vQ) = R - \text{FC} - vQ$$

我们把方程(2)中得到的 Q 值代入：

$$R = pQ$$

$$\frac{R}{p} = Q$$

$$\text{Pr} = R - \text{FC} - v \cdot \frac{R}{p}$$

在盈亏平衡点，Pr=0：

$$0 = R - \text{FC} - v \cdot \frac{R}{p}$$

$$\text{FC} = R\left(1 - \frac{v}{p}\right)$$

$$R = \frac{\text{FC}}{1 - (v/p)}$$

这个收益就是盈亏平衡点的收益，称为**盈亏平衡收益**(BER)：

$$\boxed{\text{BER} = \frac{\text{FC}}{1 - (v/p)}}$$

依据知道的盈亏平衡产量或者盈亏平衡收益，一家公司能够：

1. 决定和控制公司运营维持在适当水平，以便支付所有运营成本.
2. 评估和控制公司能力，以及调整在不同生产水平和销售量上的所得利润.

我们在应用盈亏平衡的技术之前，应该能知道所含变量的运营定义，特别是固定成本和可变成本的区别，这就是解决任何 BEQ 或 BER 问题之前实施的首要任务.

1.2 BEQ 和 BER 变量

固定成本

固定成本是不和生产量或者产品销售联系起来的成本，它们是时间的函数，不是销售或生产的函数，因此无论公司是否生产，也无论公司销售了多少，都有固定成本产生. 固定成本典型的例子有租借、租金支付、保险费、正则效用、经营和管理人员薪水以及债务服务费用等. 无论公司生产或者销售多少产品，所有这些都是必须支付的费用，在几何学上用水平线来表示.

可变成本

可变成本是和生产量或销售量相联系的任何成本. 可变成本上下波动，和生产量具有正相关关系. 典型的可变成本例子有生产原料、生产工人和生产效用，比如生产机器和设备消耗的电和油的成本，货物保险，运输和贮存. 一家公司生产越多产品，产生的可变成

本也越多. 在这种情形下，可变成本是生产量(Q)和产品每单位可变成本(v)的乘积.

边际贡献

边际贡献是每单位销售所得利润高于和超出盈亏平衡数额的那部分数量，类似地，边际贡献也是公司生产每单位产品发生的损失低于盈亏平衡点的数额. 在技术上，边际贡献等于产品单位价格扣除单位可变成本. 在数学上，CM 将是

$$\mathrm{CM} = p - v$$

事实上，这就是 BEQ 公式的分母.

例 1.2.1　Aroma 是一家城区的咖啡店. 它承担固定的运营成本 2500 美元，以及每杯 49 美分的可变的运营成本，它著名的咖啡以 1.79 美元一杯出售. 在开始得到任何利润之前，这家商店得销售多少杯咖啡？它能得到多少收益？

$$\mathrm{BEQ} = \frac{\mathrm{FC}}{p - v} = \frac{2500}{1.79 - 0.49} = 1923 \quad \text{杯咖啡}$$

$$\mathrm{BER} = \frac{\mathrm{FV}}{1 - v/p} = \frac{2500}{1 - (0.49/1.79)} = \$3442$$

且

$$\mathrm{BEQ} = \mathrm{BEQ} \cdot p = 1923 \times 1.79 = \$3442$$

例 1.2.2　表 E1-2-2 展示了 Modern Books 记录的成本数据，这是一家定制图书封皮的专业公司，每本书收取 30 美元的费用. 计算盈亏平衡产量和盈亏平衡收益.

表　E1-2-2

项目	频率	成本($)
租费	每月	2800
财产税	半年	1665
保险	每季	1112
管理者薪水	每月	6580
员工福利	每年	5312
工资	每本书	3.00
纸张	每本书	2.15
硬纸板	每本书	1.35
胶、胶带、线	每本书	0.55
皮革	每本书	1.95
墨水和打印	每本书	0.95
运输和处理	每本书	2.00

第一个任务，就是在我们理解概念的基础上，分解固定和可变成本.

- 固定成本：租费，财产税，保险，管理者薪水，员工福利.
- 可变成本：工资，纸张，硬纸板，胶，胶带，线，皮革，墨水和打印，运输和处理.

第二个任务，就是使成本项的频率一致. 这将是一个标准转变，每个固定成本项转变

成一年，每个可变成本项表示为每个单位.

固定成本：

$$
\begin{aligned}
\text{租费} &= \$2800\times12 = \$33\,600\\
\text{财产税} &= \$1665\times2 = 3300\\
\text{保险} &= \$1112\times4 = 4448\\
\text{管理者薪水} &= \$6580\times12 = 78\,960\\
\text{员工福利} &= \$5312\times1 = 5312\\
\hline
\text{总计} &= \quad\quad = \$125\,620
\end{aligned}
$$

可变成本：

$$
\begin{aligned}
\text{工资} &= \$3.00\\
\text{纸张} &= 2.15\\
\text{硬纸板} &= 1.35\\
\text{胶、胶带、线} &= 0.55\\
\text{皮革} &= 1.95\\
\text{墨水和打印} &= 4.95\\
\text{运输和处理} &= 2.00\\
\hline
\text{总计} &= \$11.95
\end{aligned}
$$

$$\text{BEQ} = \frac{\text{FC}}{p-v} = \frac{125\,620}{30-11.95} = 6959 \quad \text{本书}$$

$$\text{BER} = \frac{\text{FC}}{1-v/p} = \frac{125\,620}{1-(11.95/30)} = \$208\,786$$

而且，

$$\text{BER} = \text{BEQ}\cdot p = 6959.56(30.00) = 208.786$$

1.3 现金盈亏平衡技巧

有时候，对于有些非现金缴费，公司不得不处理成运营固定成本的一个显著部分. 通常，为了防止对盈亏平衡点的高估，这些费用都是从运营固定成本中扣减的折旧费. 在这种情形下，计算盈亏平衡点的公式将被调整为计算现金**盈亏平衡产量**(CBEQ)，它等于：

$$\boxed{\text{CBEQ} = \frac{\text{FC}-\text{NC}}{p-v}}$$

其中 NC 表示任意非现金费用，它是固定成本中相当大的部分.

例 1.3.1 Riverbent 公司的记录显示它有 5700 美元固定成本，1767 美元的折旧费，这比固定成本的三分之一多出一点点(见图 E1-3-1). 假设每个单位的可变成本是 2.30 美元，产品以 7.00 美元销售. 公司的现金盈亏平衡产量是多少? 和正常的盈亏平衡产量相比怎么样?

$$\text{CBEQ} = \frac{\text{FC}-\text{NC}}{p-v} = \frac{5700-1767}{7.00-2.30} = \$837$$

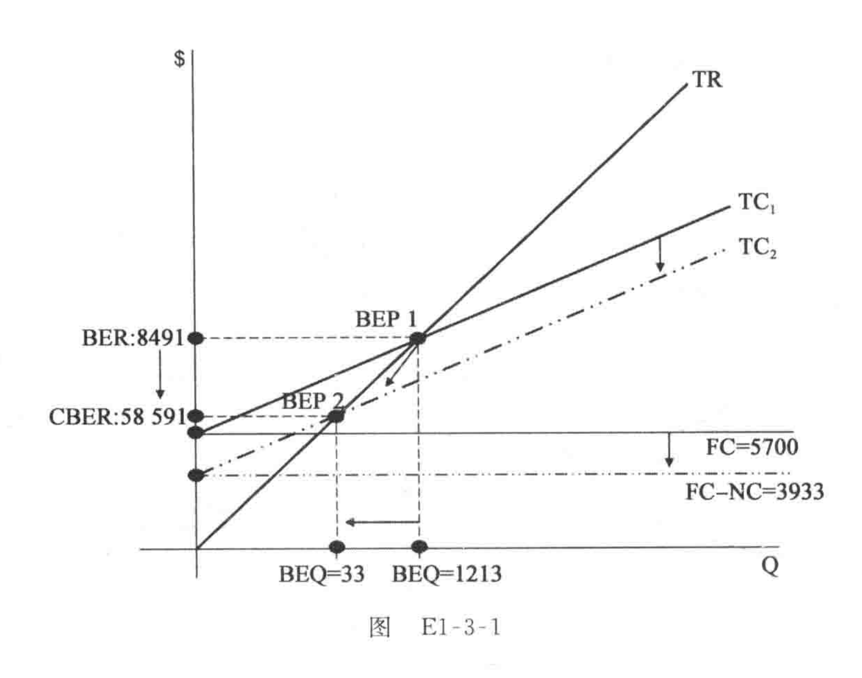


图　E1-3-1

$$\text{CBER} = \text{CBEQ}(p) = 837(7.00) = \$5859$$

如果计算通常的 BEQ，我们将不能从固定成本中扣除折旧. 在这种情形下，BEQ 将是

$$\text{BEQ} = \frac{\text{FC}}{p - v} = \frac{5700}{7.00 - 2.30} = 1213 \quad \text{单位}$$

$$\text{BEQ} = \text{BEQ}(p) = 1213(7.00) = \$8491$$

这就是高估盈亏平衡点的一种情形. 在上图中，除去非现金费用减固定成本和总成本，结果从 BEP1 到 BEP2 降低了盈亏平衡点，这将导致较低的现金盈亏平衡产量(CBEQ)，也导致了较低的盈亏平衡收益(CBER).

1.4　盈亏平衡点和目标利润

如果商家有指定要达到的目标，比如一个事前指定的利润，该指定利润称为**目标利润**. 目标利润能提前预设使其成为固定成本的一部分，以便基于盈亏平衡产量和收益的大小确定目标利润. 那么，盈亏平衡产量和收益公式将需要调节，在分子上把目标利润(TP)加到固定成本，新的 BEQ_{tp} 和 BER_{tp} 将是

$$\boxed{\text{BEQ}_{\text{tp}} = \frac{\text{FC} + \text{TP}}{p - v}}$$

和

$$\boxed{\text{BER}_{\text{tp}} = \frac{\text{FC} + \text{TP}}{1 - (v/p)}}$$

例 1.4.1　我们假设例 1.3.1 中 Riverbent 公司第一步决定获取至少 6000 美元利润(见图 E1-4-1). 盈亏平衡产量和盈亏平衡收益将是多少?

$$\mathrm{TP} = \$6000$$

$$\mathrm{BEQ}_{tp} = \frac{\mathrm{FC} + \mathrm{TP}}{p - v} = \frac{5700 + 6000}{7.00 - 2.30} = 2490 \quad 单位$$

$$\mathrm{BER}_{tp} = \frac{\mathrm{FC} + \mathrm{TP}}{1 - (v/p)} = \frac{5700 + 6000}{1 - (2.30/7.00)} = \$17\,425$$

或者

$$\mathrm{BER}_{tp} = 2489.36(7.00) = \$17\,425$$

这种情形和现金盈亏平衡的情况是相反的. 这里目标利润被添加到了固定成本上，把总成本从 TC_1 提升到 TC_2，结果是盈亏平衡产量和盈亏平衡收益二者都发生了变化. 第二个盈亏平衡点有不同的含义，不再像首个点一样(盈利等于零). 它是盈利超过零的点，该点利润将移到比目标利润能达到的利益更高的地方.

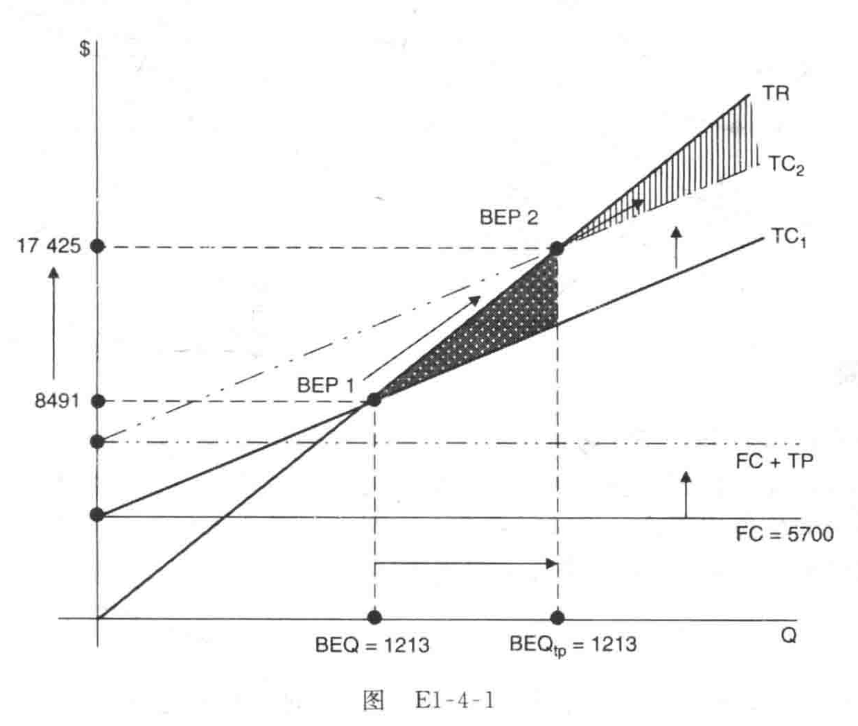


图　E1-4-1

1.5　盈亏平衡点的代数方法

Corenza 家庭企业生产洋娃娃，每个洋娃娃可变成本 20 美元，固定成本 300 美元. 如果每件洋娃娃以 50 美元销售，我们可以如下写出成本和收益方程(见图 1-1)：

$$C = \mathrm{FC} + vQ = 300 + 20Q$$

$$R = pQ = 50Q$$

在盈亏平衡点，成本等于收益：

$$C = R$$

$$300 + 20Q = 50Q$$

$$300 = 50Q - 20Q = 30Q$$

$$Q=\frac{300}{30}=10 \quad \text{这是 BEQ}$$

$$R=50Q=50(10)=500 \quad \text{这是 BER}$$

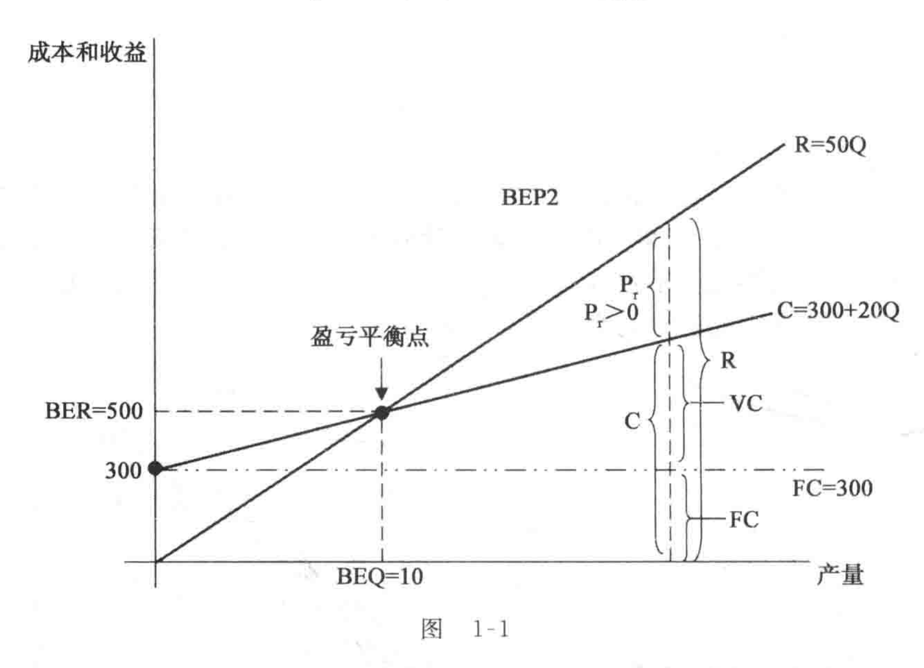


图　1-1

盈亏平衡时间

盈亏平衡点可以用产量和收益额表示，也能用时间来表示，特别是如果一家企业了解自己的生产能力，那么我们必须确认盈亏平衡点是平稳一致的，是能够用时间单位来衡量的．依据货币时间价值的理论，用时间术语来识别盈亏平衡点似乎是有趣的事情．假设一家公司知道自己的生产率为 q，如果要求完成某种产量的时间是 t，Q 指盈亏平衡产量，那么我们能记

$$Q=qt \tag{4}$$

假设 Corenza 家庭企业每天仅能生产 2 个洋娃娃，他们的盈亏平衡时间将是 5 天．

$$Q=qt$$

$$10=2t$$

$$t=\frac{10}{2}=5 \quad 天$$

现实中，产品要花费一些时间才能销售出去，这就意味着一个产品在生产并能用于销售和实际从销售中获得收益这二者之间有一段时滞．所以，用 t_L 表示时滞，回到原始成本和收益方程，把方程(4)中 Q 值代入：

$$\begin{aligned} C &= \mathrm{FC}+vQ \\ C &= \mathrm{FC}+vqt \\ R &= pQ \end{aligned} \tag{5}$$

$$R = pqt$$

我们可以把时滞的因素加入收益方程：

$$R = pq(t - t_L) \tag{6}$$

现在，在盈亏平衡条件下，令 C 和 R 相等，则由方程(5)和(6)解出 t 作为盈亏平衡时间：

$$C = R$$
$$\mathrm{FC} + vqt = pq(t - t_L)$$
$$\mathrm{FC} + vqt = pqt - pqt_L$$
$$\mathrm{FC} + pqt_L = pqt - vqt$$
$$\mathrm{FC} + pqt_L = qt(p - v)$$
$$t = \frac{\mathrm{FC} + pqt_L}{q(p - v)}$$

这个 t 是盈亏平衡时间(BET)，用固定成本(FC)、产品单位价格(p)、生产率(q)、时滞(t_L)和单位可变成本(v)表示.

$$\boxed{\mathrm{BET} = \frac{\mathrm{FC} + pqt_L}{q(p - v)}}$$

例 1.5.1 假设 Corenza 决定生产海滩工艺纪念品，每天可生产四件，每件可变成本是 28 美元. 假设 300 美元的固定成本是相同的. 每件纪念品将以 60 美元销售，但是收益进账将花去 3 天时间. 这家商业何时将盈亏平衡？盈亏平衡时有什么产量，有多少收益？

$$\mathrm{BET} = \frac{\mathrm{FC} + pqt_L}{q(p - v)} = \frac{300 + 60 \times 4 \times 3}{4(60 - 28)}$$

$=$ 盈亏平衡时间是 7.97 天或 8 天

$$R = pq(t - t_L) = 60 \times 4 \times (8 - 3)$$
$$\mathrm{BER} = \$1200$$
$$\mathrm{BEQ} = \frac{\mathrm{BER}}{P} = \frac{1200}{60} = 20 \quad \text{件工艺纪念品}$$

例 1.5.2 轮胎制造公司 Goodtract 有如下数据(见图 E1-5-2)，求 BET、BER 和 BEQ.

固定成本 $= \$80\,000$

每只轮胎可变成本 $= \$20$

每日生产率 $= 100$ 只轮胎

每只轮胎销售价格 $= \$80$

收益的时滞 $= 20$ 天

首先，当包含了时间元素时，我们构造成本和收益方程.

$$C = \mathrm{FC} + vqt = 80\,000 + 20(100)t = 80\,000 + 2000t$$
$$R = pq(t - t_L) = 80 \times 100(t - 20) = 8000t - 160\,000$$

在盈亏平衡点，$C = R$：

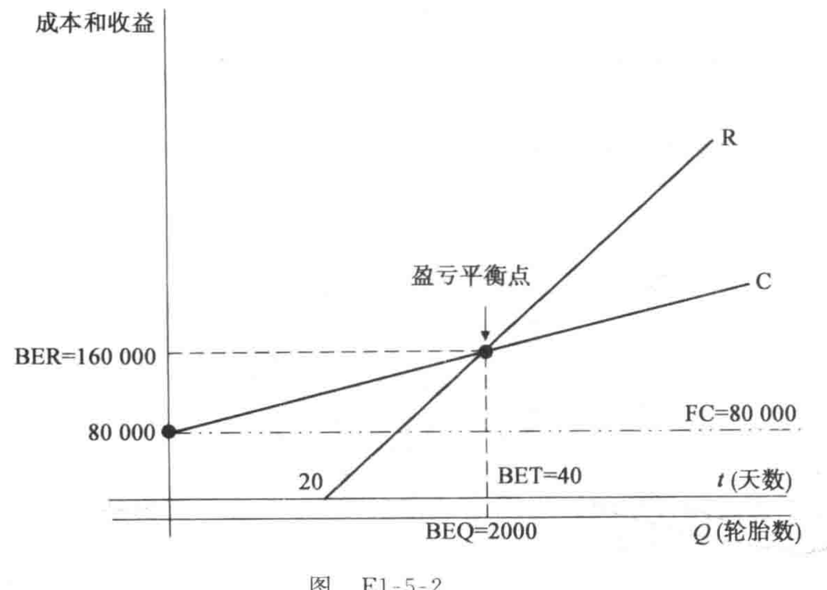


图　E1-5-2

$$80\,000 + 2000t = 8000t - 160\,000$$
$$240\,000 = 6000t$$
$$t = \frac{240\,000}{6000}$$
$$\text{BET} = t = 40\text{ 天(盈亏平衡时间)}$$
$$\text{BER} = R = 8000t - 160\,000$$
$$= 8000(40) = 160\,000 = \$\,160\,000$$
$$\text{BEQ} = \frac{\text{BER}}{P} = \frac{160\,000}{80} = 2000\text{ 只轮胎}$$

1.6　借款时的盈亏平衡点

生意启动之初，商家通常并没有足够的生产资本．求助个人或商业贷款将是合理的选择．如果一个商人使用债务进行融资生产，当他想还清借款的时候，盈亏平衡点将是更有意义的．那就是利润等于支付的债务利息的时刻(见图 1-2)．超过那个点，收到的超额利润将继续高于利息．假设一家公司需要足够的资金来支付生产所需的固定成本和可变成本．生产资金将需要借贷，额度(B)等于

$$B = \text{FC} + vqt_L \tag{7}$$

上式将既满足支付固定成本(FC)的需要，也满足支付可变成本(vqt_L)的需要，后者将由单位可变成本(v)乘以生产率(q)再乘以适当的时间来决定．在这种情形下，时间将是时滞(t_L)，它由开始生产和开始获益之间的时间来定义．考虑一种简单利率方法，总利息将由下式得到

$$I = P \cdot r \cdot t$$

因此，把方程(7)中的 B 考虑为本金，这样一笔贷款的利息为

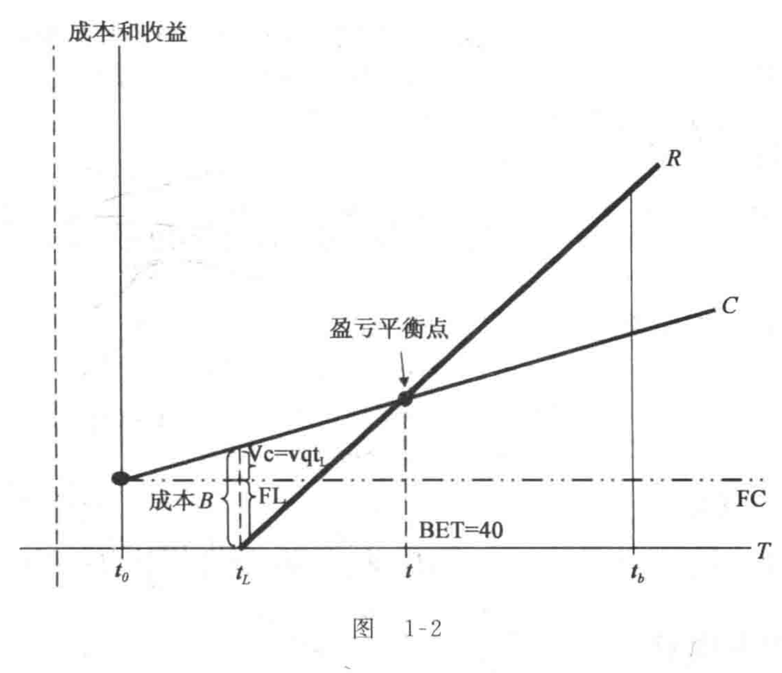


图 1-2

$$I=(\mathrm{FC}+vqt_L)rt_b \tag{8}$$

其中 r 是利率，t_b 是借款的时间或者到期期限.

现在，我们可以建立利息(I)和利润(Pr)之间的等式，并对 t 进行求解，这就是在利润和贷款所支付利息之间等式中的盈亏平衡点.

$$I=\mathrm{Pr}$$

$$I=R-C$$

$$(\mathrm{FC}+vqt_L)r(t+t_0)=pq(t-t_L)-(vqt+\mathrm{FC})$$

利息这边由方程(8)决定，这里到期期限是通过把收到贷款和开始生产之间的时间 t_0 加到时间 t 来决定，当利润和利息之间等式成立的时候，时间 t 是生产后的某个点. 方程的收益和成本部分根据方程(5)和(6)决定：

$$(\mathrm{FC}+vqt_L)(rt+rt_0)=pq(t-t_L)-(vqt+\mathrm{FC})$$

$$\mathrm{FC}\cdot rt+\mathrm{FC}rt_0+vqt_Lrt+vqt_Lrt_0-pqt+pqt_L+vqt+\mathrm{FC}=0$$

$$t(\mathrm{FC}\cdot r+vqt_Lr-pq+vq)+rt_0(\mathrm{FC}+vqt_L)+pqt_L+\mathrm{FC}=0$$

$$t[r(\mathrm{FC}+vqt_L)-q(p-v)]=-rt_0(\mathrm{FC}+vqt_L)-pqt_L-\mathrm{FC}$$

$$\boxed{t=\frac{\mathrm{FC}+pqt_L+rt_0[\mathrm{FC}+vqt_L]}{q(p-v)-r[\mathrm{FC}+vqt_L]}}$$

其中 t 是利润和借款的利息成本之间的盈亏平衡点.

例 1.6.1 考虑一家生产手机的公司. 它的固定成本是 60 000 美元，每部手机的可变成本为 15 美元，公司一天能生产 200 部手机，以每部 50 美元进行销售，直到生产开始后 40 天才获得收益. 假设公司为了支付所有成本，以 10％的利率得到了一笔贷款. 公司在生产前 30 天收到这笔钱，并且要求在 2 年内还清. 计算利息成本，并且确定盈亏平衡时间(t).

FC＝60 000；$v=15$；$q=200$；$p=50$；$t_L=40$ 天；$r=10\%$；$t_b=2$ 年；$t_0=30$ 天

$$I=(\mathrm{FC}+qvt_L)rt_b=[60\,000+15(200)(40)](0.10)(2)=36\,000$$

$$t=\frac{\mathrm{FC}+pqt_L+rt_0(\mathrm{FC}+vqt_L)}{q(p-v)-r(\mathrm{FC}+vqt_L)}$$

$$=\frac{60\,000+50(200)(40)+(0.10/365)(30)[60\,000+15(200)(40)]}{200(50-15)-(0.10/365)[60\,000+15(200)(40)]}$$

$$=66.40\text{ 天或 }67\text{ 天}$$

在开始生产后第 67 天利润将是

$$\mathrm{Pr}=R-C=pq(t-t_L)-(vqt+\mathrm{FC})$$

$$=50(200)(67-40)-[15(200)(67)+60\,000]$$

$$=270\,000-261\,000=9000$$

开始生产后第 67 天利息为

$$I=(\mathrm{FR}+vqt_L)rt=[60\,000+15(200)(40)]\left(\frac{0.10}{365}\right)(67)=3304.10$$

1.7 双重盈亏平衡点

目前来看，收益和成本函数要么是线性的，要么是渐近线性的，并且两个函数图像由直线构成，相交于一点，就形成了单个盈亏平衡点(见图 1-1). 通常盈亏平衡点的左侧，总的成本线位于总收益线的上方，表示亏损的区域，而盈亏平衡点的右侧，总成本线在总收益线的下方，表明利润区域.

在其他情形，要么两个函数都是非线性的，要么其中之一是非线性的，一种情形可能的结果是，两条曲线相互交叉产生不止一个交点，通常是两个交点，这就导致了两个盈亏平衡点. 上下两条曲线以及左右两个盈亏平衡点之间形成的区域是得利的区域. 通常在第一个盈亏平衡点右侧较低位置开始盈利，这被称为**低盈亏平衡点**，然后继续增加，直到在某个生产点达到最大值. 此后，利润开始降低，直到在第二个盈亏平衡点变为零，称为**高盈亏平衡点**. 越过那个点，再次产生损失. 让我们考虑下面的收益成本函数：

$$R=-2Q^2+86Q$$

$$C=16Q+140$$

并且

1. 定位两个盈亏平衡点.
2. 确定当盈利达到最大值时生产水平是多少.
3. 计算最大盈利.

$$\mathrm{Pr}=R-C=-2Q^2+86Q-16Q-140=-2Q^2+70Q-140$$

在盈亏平衡点，盈利将是零，所以我们令方程为零：

$$\mathrm{Pr}=-2Q^2+70Q-140=0$$

求解盈亏平衡点 Q. 函数是二次的，Q 将有两个值. 函数具有下面的形式：

$$Y=ax^2+bx+c$$

我们能用二次函数的求根公式解出 Q.

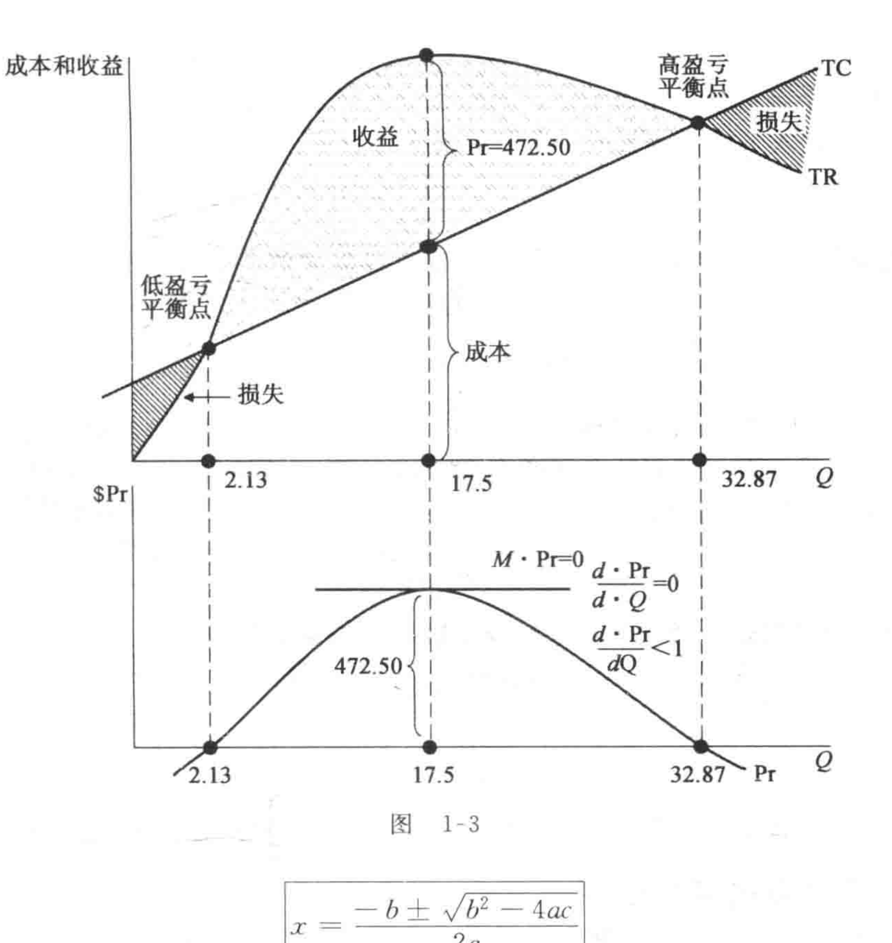


图 1-3

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

在上述情形中，这些公式中系数的值是 $a=2$，$b=70$，$c=-140$.

$$Q=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$Q=\frac{-70\pm\sqrt{(70)^2-4(-2)(-140)}}{2(-2)}=\frac{-70\pm\sqrt{3780}}{-4}$$

$$Q_1=\frac{-70+61.48}{-4}=2.13\quad \text{低盈亏平衡点}$$

和

$$Q_2=\frac{-70-61.48}{-4}=32.87\quad \text{高盈亏平衡点}$$

最大利润发生在产量为 Q_v 时，这可以由二次函数的顶点公式得到.

$$\boxed{Q_v=\frac{-b}{2a}}$$

$$=\frac{-70}{2(-2)}=17.5$$

替换利润函数中的生产量，得到最大利润(Pr^m)：

$$\mathrm{Pr}^m = -2Q_v^2 + 70Q_v - 140 = -2(17.5)^2 + 70(17.5) - 140 = 472.50$$

为了证明这个函数值就是最大值，我们做以下两步检查.

1. 当把 Q_v 代入下式，函数的一阶导数值必须为零：

$$\frac{\mathrm{dPr}}{\mathrm{d}Q} = 0$$

利润函数的一阶导数指边际利润，零表示在最大值点切线是水平线.

$$\mathrm{Pr}^m = -2Q_v^2 + 70Qv - 140$$

$$\frac{\mathrm{dPr}^m}{\mathrm{d}Q_v} = -4Q_v + 70 = -4(17.5) + 70 = 0$$

2. 因为开口向下抛物线顶部的最大值点和开口向上抛物线底部的最小值点两者都有水平切线，我们需要做最大值条件的第二步检查. 那就是计算利润函数的二阶导数，当把 Q_v 代入时，函数的二阶导数必须为负值：

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{Pr}}{\mathrm{d}Q^2} < 0$$

负值表明函数是下降的. 如果是最小值，函数将是上升的.

$$\frac{\mathrm{dPr}}{\mathrm{d}Q} = -4Q_v + 70$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{Pr}}{\mathrm{d}Q^2} = -4$$

这个条件能简单用二次函数中 x^2 的系数 a 取负值来表示.

1.8　盈亏平衡点的其他应用

盈亏平衡点的概念可以出于不同的目的应用到许多情形中. 除了供需之间的平衡点(这可能是最经典的应用)，盈亏平衡点在金融和经济中应用较多. 让我们来看看一些应用.

盈亏平衡点和股票销售决策

股票在不同的价格被买进卖出，通过交易支付佣金. 盈亏平衡点概念能用于寻找盈亏平衡价格，在其之上投资者可以卖出股票获利. 在这个意义上，盈亏平衡分析能再次被考虑为有价值的决策工具.

假设购买一种股票 K 股，每股购买价格 x，并且购买时支付的佣金率为 ip，那么我们能写出股票购买的成本方程(C)为

$$C = xK + \mathrm{ip}(xK)$$

$$C = xK(1 + \mathrm{ip}) \tag{1}$$

类似地，如果出售这些股票 K 股，每股出售价格 y，出售时支付类似的佣金(is)，我们能写出股票出售的收益方程(R)：

$$R = yK - \mathrm{is}(yK)$$

$$R = yK(1 - \mathrm{is}) \tag{2}$$

通过方程(1)和(2)，我们可以得出每股(y_b)的销售盈亏平衡价格.

$$C = R$$

$$xK(1+\text{ip}) = yK(1-\text{is})$$

从两边消去 K，解出 y

$$\boxed{y_b = \frac{x(1+\text{ip})}{1-\text{is}}}$$

例 1.8.1 Wayne 购买了 50 股百事可乐，每股价格 95 美元，支付 3.5%的佣金，如果出售佣金率保持相同，盈亏平衡销售价格是多少？校验答案.

$x=95$；$K=50$；$\text{ip}=3.5\%$；$\text{is}=3.5\%$

$$y_b = \frac{x(1+\text{ip})}{1-\text{is}} = \frac{95(1+0.035)}{1-0.035} = \$101.89$$

这是 Wayne 的盈亏平衡价格. 用这个价格销售股票，他不可能取得任意收益，除非销售价格比 101.89 美元高，才会获取收益.

检验：如果他在 101.89 美元销售，他的收益将是

$$R = yK = 101.89 \times 50 = 5094.50$$

他必须支付 3.5%的销售佣金，他的净收益(R_n)为

$$R_n = R - \text{is} \cdot yK = 5094.50 - 0.035 \times 101.89 \times 50 = 4916.2$$

该股票已有的花费

$$C = xK = 95 \times 50 = 4750$$

他付出 3.5%的购买佣金，加到成本上，使得总成本为

$$C_t = C + \text{ip} \cdot xK = 4750 + 0.035 \times 95 \times 50 = 4916.2$$

所以，检验了 101.89 美元的销售价格可以让 Wayne 保本，既没有盈利，也没有亏损，因为购买的总成本等于销售的净收益. 那么，他将知道除非每股销售价格超过 101.89 美元，否则最好就是不销售.

盈亏平衡点和提前退休决定

有些人可能想提前退休. 如果他们碰巧怀抱这种想法，他们就可能知道，与正常退休所能获得的退休金比较起来，提前退休的退休金将会大打折扣. 要是选择提前退休，一个人总是很关心将损失多少退休金. 当然，那将不但依赖于打多大折扣，还依赖于多早退休. 贯穿这种想法的逻辑思路就是冥思苦想提前退休的退休金赶上正常退休的退休金将要花费多久时间. 换句话说，使提前退休的退休金贴现等于正常退休的退休金，盈亏平衡的年数将是多少？答案在于对等待正常退休将得到什么和选择提前退休将失去什么的考虑. 事实上，下面我们将看到，两者的比例定义了盈亏平衡时间.

假设一家公司提供提前退休退休金(EP)，这将低于按时退休的正常退休金(RP). 假设 t_b 是盈亏平衡时间，即在将来的某一时间，贴现的 EP 赶上正常退休金. 假设 t_e 是提前多少时间退休，即正常和提前退休在时间上的差. 现在，看看图 1-4 中的时间轴，我们能构造提前退休的总收益(TR_e)和正常按时退休的总收益(TR_{in}).

$$\text{TR}_e = \text{EP} \cdot t_b$$

$$\text{TR}_{\text{in}} = \text{RP}(t_b - t_e)$$

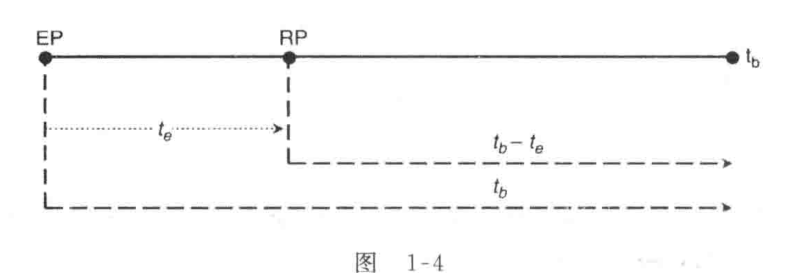


图　1-4

在时刻 t_b，两个退休金将相等：

$$TE_e = TR_{in}$$

$$EP \cdot t_b = RP(t_b - t_e)$$

$$EP \cdot t_b = RP \cdot t_b - RP \cdot t_e$$

$$EP \cdot t_b - RP \cdot t_b + RP \cdot t_e = 0$$

$$RP \cdot t_e = RP \cdot t_b - EP \cdot t_b$$

$$RP \cdot t_e = t_b(RP - EP)$$

$$\boxed{t_b = \frac{RP \cdot t_e}{RP - EP}}$$

例 1.8.2　Rosemary 正在考虑明年 63 岁时退休，公司给她提前退休每年支付 72 000 美元．但是，如果她等到 65 岁退休，退休金将是 90 000 美元．求盈亏平衡时间．

RP=90 000；EP=72 000；t_e=2 年．

$$t_b = \frac{RP \cdot t_e}{RP - EP} = \frac{90\ 000(2)}{90\ 000 - 72\ 000} = 10$$

这意味着 72 000 美元的提前退休金将等于 Rosemary 在 73 岁时及时退休的退休金．所以，如果她可以，多工作两年以上是最好的．

在现实中，很多退休金计划允许根据生活成本的增加按年度调节退休金支付．在这种情形下，类似于得到年金到期期限的公式，上述盈亏平衡时间公式将被调节为允许得到盈亏平衡时间的公式．当以某个比率(r)按年调节退休金的时候，提前退休盈亏平衡时间的新公式将是：

$$\boxed{t_b^{adj} = \frac{\ln\left[\dfrac{(RP - EP)}{RP(1+r)^{-t_e} - EP}\right]}{\ln(1+r)}}$$

例 1.8.3　Steve 已经在 63 岁申请提前退休，此时他将得到一笔 32 000 美元的退休金．由于他恶化的身体状况，他的妻子力劝他不要为了得到 40 000 美元的全额退休金，而去再多工作两年．他的公司以生活成本增长 2.75%来调节退休金．当两种退休金相等的时候，他将是多大年龄？

$$t_b^{adj} = \frac{\ln\left[\dfrac{(RP - EP)}{RP(1+r)^{-t_e} - EP}\right]}{\ln(1+r)}$$

$$= \frac{\ln[(40\ 000 - 32\ 000)/40\ 000(1 + 0.0275)^{-2} - 37\ 000]}{\ln(1 + 0.0275)} = 11.3$$

Steve 将比 74(63＋11.3)岁老一些.

1.9 BEQ 和 BER 对变量的灵敏性

BEQ 和 BER 灵敏性是指相对于组成它们的成分变量变化，盈亏平衡产量和盈亏平衡收益的值的变化. 表 1-1(用了加号或减号以及箭头)表示了当每个相关变量增加，其他变量保持不变时，盈亏平衡产量和盈亏平衡收益相应的变化. 如果把 BEQ 和 BER 当比率来考虑，即在这种意义下，每个都是一个量除以另一个量，结果将依赖于分子和分母之间的典型关系，所以灵敏性也可以简单地理解为比率的特征.

表 1-1 BEQ 和 BER 对 FC、v、p、CM 的灵敏性

下列增加时：	BEQ 和 BER 将会：
固定成本	(＋)↑
单位变动成本	(＋)↑
单位价格	(－)↓
边际贡献	(－)↓

1.10 盈亏平衡分析的使用和局限

作为一种技术分析，盈亏平衡方法在一些商业难题上发挥了很大的作用，得到了广泛的使用普及. 在商业决策的核心领地，有许多盈亏平衡技巧的主要应用，例如：

1. 对一家公司的潜在能力进行估值，使其能够支付赚取要求利润所需的全部运营成本.
2. 评价公司经营方式，该方式不仅关联销售的利润，而且测试对销售水平波动的响应能力.
3. 提供一种度量商业潜在风险的方法，特别是涉及资产投资回报的可变性和商业运营杠杆程度.
4. 提供理解新产品发布或者商业计划推广可能性的一种度量，这对于小企业的决策是特别有价值的，这些小企业自然野心勃勃，为了追求超额利润，既拓宽生产线的范围，也横向纵向拓展整个商业.

尽管好处和用途如此之多，盈亏平衡技巧仍有一些显著的局限，例如：

1. 在许多技术情形中，分析假设成本和收益函数都是线性的. 而在实际中，由于生产价格和相对于销售水平的可变成本，也由于许多其他影响，成本和收益函数基本是非线性的.
2. 在理论上，可以把固定和可变成本完全抽象地分开，但在实际中却不容易达到. 很多支出类型介于固定和可变成本之间，有些具有半可变性的属性，有些基本上是交叉组成的.

3. 盈亏平衡分析似乎对单一产品公司是更有效的，但是在多产品商业公司中，即使盈亏平衡点转化为盈亏平衡收益，盈亏平衡分析也变得更加复杂. 这种复杂性来源于分清不同生产线和相同生产工厂在相同时间内生产的各种产品的成本是很困难的，甚至是完全不可能的.
4. 盈亏平衡分析是对于变量的一种短期分析. 这将忽视许多发生在长期运营中的成本和收益，比如广告、科研和开发等.

第2章　杠杆效应

盈亏平衡分析提供了一种计算盈亏平衡点的工具，超过盈亏平衡点之后，随着一家公司生产和销售更多产品，它将开始收到源源不断的利润. 那么，关键的问题将变成扩大多少生产和销售，才能增加产销量以达到某种利润的水平. 这是一个利润对产品销售变化的敏感性问题，也即我们将要讨论的杠杆效应. 杠杆有三种类型：运营杠杆、财务杠杆以及总杠杆.

2.1　运营杠杆

运营杠杆指利润变化对于销售变化的灵敏度. 特别地，它是固定运营成本的潜在用途，起着放大关于运营收入或息税前利润(EBIT)销售变化的影响作用. 固定运营成本项目位于资产负债表顶部，比如杠杆、管理人员信息、财产税等.

运营杠杆程度(DOL)度量利润的响应能力，即运营收入(OY)变化相对于销售(S)变化的百分比.

$$\mathrm{DOL}=\frac{\%\Delta \mathrm{OY}}{\%\Delta S}$$

$$\mathrm{DOL}=\frac{[(\mathrm{OY}_2-\mathrm{OY}_1)/\mathrm{OY}_1]\times 100}{[(S_2-S_1)/S_1]\times 100}$$

$$\boxed{\mathrm{DOL}=\frac{(\mathrm{OY}_2-\mathrm{OY}_1)/\mathrm{OY}_1}{(S_2-S_1)/S_1}}$$

例 2.1.1　对于一家小企业，当它的产品销售从 4200 美元增加到 5880 美元，对应的运营收入从 884 美元增加到 1680 美元，运营杠杆程度是多少？

	S	OY	
S_1	4200	884	OY_1
S_2	5880	1680	OY_2

$$\mathrm{DOL}=\frac{(\mathrm{OY}_2-\mathrm{OY}_1)/\mathrm{OY}_1}{(S_2-S_1)/S_1}=\frac{(1680-884)/884}{(5880-4200)/4200}=\frac{0.90}{0.40}=2.25$$

这意味着销售每改变 1%，运营收入(利润或 EBIT)将有 2.25%的改变. 换句话说，当销售增加了 40%，利润将上升 90%，这可以从 DOL 中的分子、分母看出. 如图 E2-1-1 所示，销售从 Q_1 个单位移到 Q_2 个单位(或者收益从 R_1 美元移到 R_2 美元)，结果利润从 Prof_1 移到 Prof_2. 这种影响在其他方向也将保持，即销售减少(单位产品或美元收益)40%，将导致利润下降 90%，我们能计算销售在相反方向上的移动，从 Q_1 到 Q_0 或者从 R_1 到 R_0，销售大约减少 40%(420 到 252 个单位或 4200 美元到 2520 美元)，并且可以看到利润从 $\mathrm{Prof}_1=884$ 到 $\mathrm{Prof}_0=88.4$ 下降 90%.

$$\mathrm{DOL} = \frac{(884 - 88.4)/884}{(4200 - 2520)/4200} = \frac{0.90}{0.4} = 2.25$$

所以，实际上 DOL 能被考虑为销售上的变化对利润产生的影响的乘数效应. 换句话说，DOL 是一个弹性的概念. 它是利润相对于销售的弹性. 在这种意义上，我们可以表示为利润(π)局部变化相对于产出(Q)的局部变化：

$$\mathrm{DOL} = \frac{\partial\pi/\pi}{\partial Q/Q}$$

在任意产出水平都可以得到杠杆程度. 如果固定成本是常数，利润变化($\partial\pi$)将是

$$\partial\pi = \partial Q(p - v) \tag{1}$$

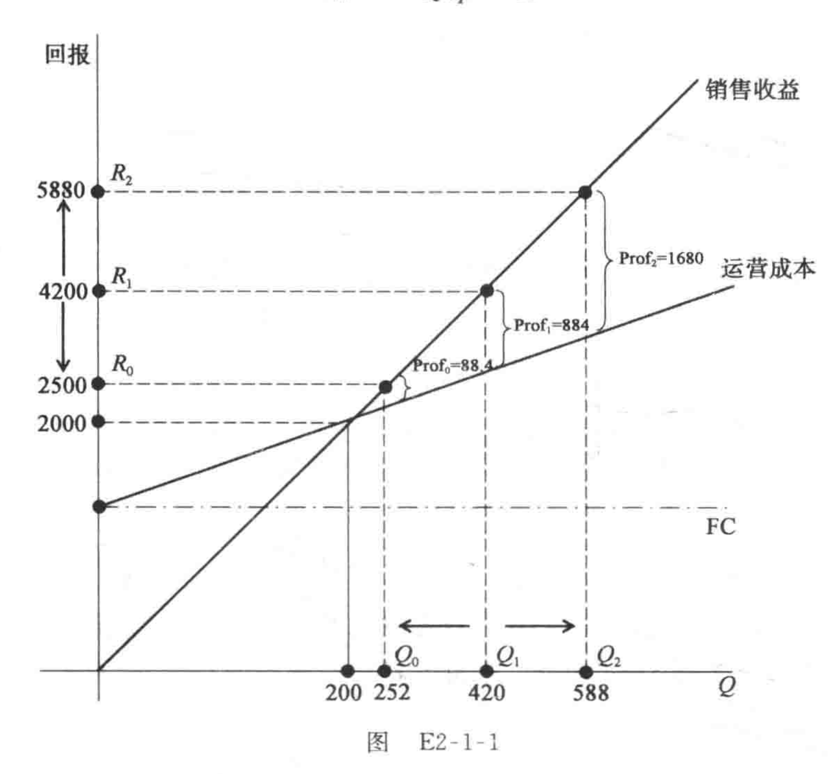


图　E2-1-1

利润(π)是

$$\pi = R - C = PQ - (\mathrm{FC} + vQ) = PQ - \mathrm{FC} - vQ = Q(P - v) - \mathrm{FC} \tag{2}$$

把方程(1)和(2)代入上述 DOL 方程，得

$$\mathrm{DOL} = \frac{\partial Q(P - v)}{Q(P - v) - \mathrm{FC}} \cdot \frac{Q}{\partial Q}$$

消去 ∂Q，我们得

$$\boxed{\frac{Q(P - v)}{Q(P - v) - \mathrm{FC}}}$$

这就是在任意产出水平的运营杠杆程度.

例 2.1.2　求出并解释一家公司的运营杠杆程度(DOL). 这家公司有如下数据：FC=2500 美元，单位可变成本=5 美元；单位价格=10 美元；单位销售产品=1000.

$$\text{DOL} = \frac{Q(P-v)}{Q(P-v)-\text{FC}} = \frac{1000(10-5)}{1000(10-5)-2500} = 2$$

运营杠杆程度为 2，意味着销售每变化 1%，运营收入将变化 2%.

2.2 运营杠杆、固定成本和商业风险

从上述 DOL 公式可以看到固定运营成本对 DOL 的影响. 从数学上来看，因为项 $Q(p-v)$在分子和分母中都出现了，固定成本(FC)的角色就变得很关键. 在 FC 中任意增加都将使得分母减小，而 DOL 增大；任意 FC 的减小，都将使分母增大，而 DOL 降低. 那么，我们可以得出结论：一个公司的固定运营成本相对于可变成本越高，杠杆作用程度就越大，最终利润就越高. 如果例 2.1.2 中固定成本从 2500 变到 4000，那么我们可以通过观察 DOL 中的变化来检查以上结论.

$$\text{DOL} = \frac{1000(10-5)}{1000(10-5)-4000} = 5$$

杠杆程度为 5，意味着当销售增加 1%，利润将增长 5%而不是 2%. 表 2-1 和图 2-1 表明当以相同价格销售相同产品的三家公司固定成本显著增加时，DOL 和利润(Pr)将如何变化. 可是，正如我们前面已经看到的，运营杠杆也在相反方向起作用. 这意味着如果我们在例 2.1.2 图中销售减少 1%，利润将降低 5%从而带来更大损失. 所以，固定成本的变化使得两种方式的情形都很灵敏，这就转变为商业风险的来源. 这种潜在风险来自两个因素：

1. 通过增加固定成本追求更多利润的情形，公司将承担不能支付所有高成本的风险，还得承担不能保持销售增长的额外风险.

表 2-1 三家公司用三种不同的成本函数以相同价格销售某个产品

公司	Q	R	成本 FC+vQ	Pr	$A \cdot$ Pr	$\text{DOL}=\frac{Q(p-v)}{Q(p-v-\text{FC})}$
公司 1						
B-even→	1000	3000	3000	0	0	FC= $1000；$vc$= $2.00；
	1500	3500	4000	500	500	P= $3.00
	2000	6000	5000	1000	500	
	2500	7500	6000	1500	500	$\text{DOL}=\frac{3500(3-2)}{3500(3-2)-1000}$
	3000	9000	7000	2000	500	=1.4
——→	3500	10 500	8000	2500	500	
	4000	12 000	9000	3000	500	
公司 2	1000	3000	4000	−1000	—	FC= $2250；$vc$= $1.75
B-even→	1800	5400	5400	0	−1000	P= $3.00
	2500	7500	6625	875	625	
	3000	9000	7500	1500	625	$\text{DOL}=\frac{3500(3-1.75)}{3500(3-1.75)-2250}$
——→	3500	10 500	8375	2125	625	=2.06
	4000	12 000	9250	2750	625	
	4500	13 500	10 125	3375	625	

（续）

公司	Q	R	成本 FC+vQ	Pr	$A\cdot$Pr	$\text{DOL}=\frac{Q(p-v)}{Q(p-v-\text{FC})}$
公司 3	1000	3000	5000	−2000	—	FC= \$ 3750；vc= \$ 1.25
B-even→	2143	6429	6429	0	−2000	P= \$ 3.00
	2500	7500	6875	625	625	
	3000	9000	7500	1500	875	$\text{DOL}=\frac{3500(3-1.25)}{3500(3-1.25)-3700}$
——→	3500	10 500	8125	2375	875	=2.58
	4000	12 000	8750	3250	875	
	4500	13 500	9375	4125	875	

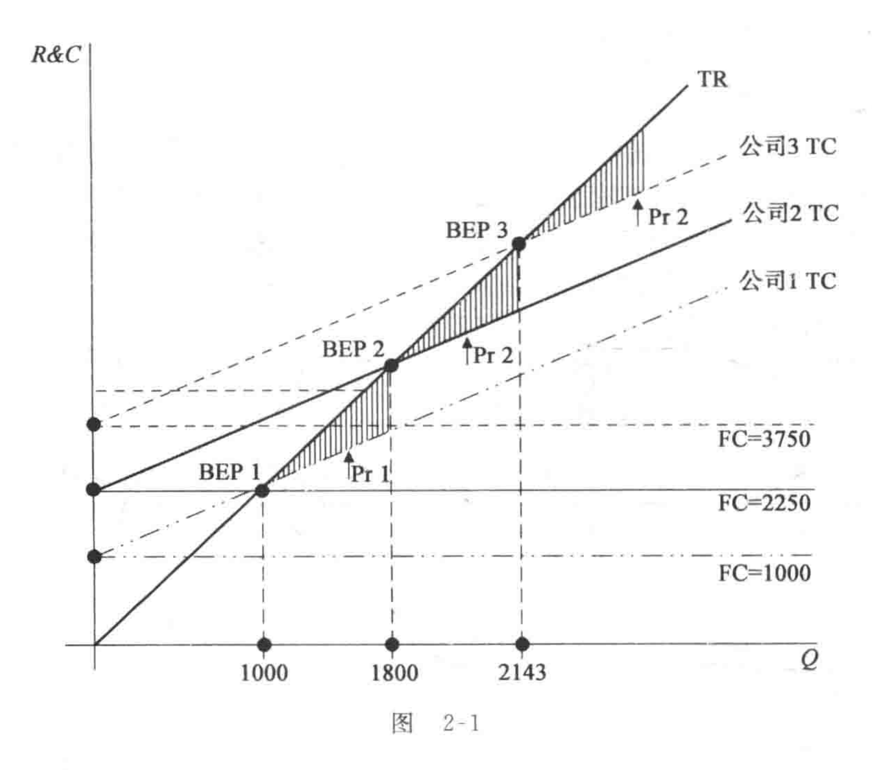


图 2-1

2. 销售轻微下降的情形，公司将承担找出利润明显下降的风险，可能降到一个伤害合理恢复的点位.

因此，不断增长的诱惑，既有来自于新技术的利益的诱惑，也有现代化的生产诱惑，还有用资本密集技术代替劳动密集技术的诱惑，这些都有可能增加效率，但是要求产生更多固定成本，如果真要这么做，那财务管理者必须更加小心谨慎，在考虑增加收益带来好处的同时也要仔细合理地权衡所有相关风险.

2.3 财务杠杆

财务杠杆是公司每股收益变化对于运营收入(利润)变化或者息税前利润(EBIT)变化的灵敏度. 类似于运营杠杆，财务杠杆表示固定财务费的潜在用途，放大运营收入(OY)变化

对每股收益(EPS)的影响．这里固定财务费是指：债务利息和优先股分红．这些都是资产负债表较低部分的负债．换句话说，财务杠杆主要是通过负债(总体或者局部)来融资，因此财务杠杆有时候也被叫做 OPM(Other People's Money)、**债务融资**或者**举债经营**。在商业投资中使用债务通常出于合理的原因，例如：

1．债务投资回报比资产投资回报高．

2．债务资产更可能是现成的．

3．利用债务资产常常不影响在公司里的投票情况．

简而言之，如果一家公司具有高固定财务成本，应该重点考虑财务杠杆，并且可能得到高投资回报，但是相应地面对潜在的财务风险．

类似于运营杠杆，财务杠杆有自己的度量，即财务杠杆程度(DFL)．它度量每股收益(EPS)的变化相对于运营收入(OY)的变化的响应能力．

$$\mathrm{DFL}=\frac{\%\Delta \mathrm{EPS}}{\%\Delta \mathrm{OY}}$$

$$\boxed{\mathrm{DFL}=\frac{(\mathrm{EPS}_2-\mathrm{EPS}_1)/\mathrm{EPS}_1}{(\mathrm{OY}_2-\mathrm{OY}_1)/\mathrm{OY}_1}}$$

注意到 EPS 指将分配给普通股票持有人的净收益：

$$\mathrm{EPS}=\frac{\text{净收入}}{\text{普通股的股份数}}$$

并且，如果有任意优先股，它们的分红必须在得到 EPS 之前从净收入中扣减：

$$\mathrm{EPS}=\frac{\text{净收入}-\text{优先股分红}}{\text{普通股的股份数}}$$

例 2.3.1 计算 Sureluck 公司的财务杠杆程度．公司相继两年的数据显示在表 E2-3-1中．

首先，我们需要计算运营收入(OY)和每股收益(EPS)：

$$\text{运营收入}=\text{总收入}-\text{运营支出}$$
$$\text{第一年运营收入}=\$30\,250-\$10\,100=\$20\,150$$
$$\text{第二年运营收入}=\$32\,900-\$10\,940=\$21\,960$$

对于 EPS，我们需要通过从运营收入中减去利息和税收计算净收入：

$$\text{净收入}=\text{运营收入}-(\text{利息}+\text{税收})$$
$$\text{第一年净收入}=\$20\,150-(\$766+\$3400)=\$15\,984$$
$$\text{第二年净收入}=\$21\,960-(\$870+\$3490)=\$17\,600$$

表 E2-3-1

项目	第 1 年	第 2 年
毛收入($)	30 250	32 900
经营成本($)	10 100	10 940
利息($)	766	870
所得税($)	3400	3490
股数($)	30 000	30 000

$$EPS_1 = \frac{15\ 984}{30\ 000} = 0.53$$

$$EPS_2 = \frac{17\ 600}{30\ 000} = 0.59$$

	OY	EPS	
OY_1	20 150	0.53	EPS_1
OY_2	21 960	0.59	EPS_2

$$DFL = \frac{(EPS_2 - EPS_1)/EPS_1}{[(OY_2 - OY_1)/OY_1]} = \frac{(0.59 - 0.53)/0.53}{(21\ 960 - 20\ 150)/20\ 150} = 1.26$$

这里 1.26 的 DFL 意味着 Sureluck 的运营收入每改变 1%，它的每股收益将改变 1.42%．这将意味着运营收入增加或者减少，使得每股收入相应地随之增加或者减少．

例 2.3.2　我们假设例 2.3.1 中 Sureluck 公司分配净收入的大约 43%给优先股．这对 DFL 影响如何？

变化在 EPS 的计算上．优先股分红必须在普通股持有者分红之前从净收入中减去．

优先股分红＝净收入的 43%

第一年优先股分红＝0.43 × \$15 984 ＝ \$6873

第二年优先股分红＝0.43 × \$17 600 ＝ \$7568

$$EPS_1 = \frac{15\ 984 - 6873}{30\ 000} = 0.3037$$

$$EPS_2 = \frac{17\ 600 - 7568}{30\ 000} = 0.3344$$

$$DFL = \frac{(0.3344 - 0.3037)/0.3037}{(21\ 960 - 20\ 150)/20\ 150} = 1.125$$

以下是另一个建立在运营收入水平基础上的 DFL 公式．当支付优先股分红时，这个公式更直接些．用这个公式，我们不必计算 EPS.

$$\boxed{DFL = \frac{OY}{OY - \left[I + \left(\frac{D_{ps}}{1 - T}\right)\right]}}$$

其中 OY 是运营收入，I 是利息，D_{ps}是优先股分红，T 是税收率．

如果计算例 2.3.2 中的 DFL，我们需要知道税收率．为此我们可以假设税收率是基于税对收入的．所以，让我们假设在这个例子中，对 1 年税率是 16.8%，对 2 年税率是 15.9%．现在，我们就能基于运营收入，对每一年单独计算财务杠杆程度：

$$DFL = \frac{OY}{OY - \left[I + \left(\frac{D_{ps}}{1 - T}\right)\right]}$$

$$DFL_1 = \frac{20\ 150}{20\ 150 - \left[3400 + \left(\frac{6873}{1 - 0.168}\right)\right]} = 2.37$$

$$\mathrm{DFL}_2=\frac{21\ 960}{21\ 960-\left[3490+\left(\frac{7568}{1-0.159}\right)\right]}=2.32$$

例 2.3.3 在这个例子中，我们通过三种可替换的财务计划，继续计算每股收益的财务杠杆影响. 让我们假设一家公司需要 100 000 美元推广其商业，假设董事会有如下替换计划支持这个推广项目.

Ⅰ：100%发行股票筹资. 整个 100 000 美元通过以每股 100 美元的价格，出售 1000 股股票筹集到.

Ⅱ：2/3 发行股票筹资和 1/3 发行债务筹资. 即 100 000 美元的 66%(66 000 美元)内部认股得到，且 34%(34 000 美元)借款以 9.5%的利率得到.

Ⅲ：1/3 发行股票筹资和 2/3 发行债务筹资. 即 100 000 美元的 34%(34 000 美元)内部认股得到，且 66%(66 000 美元)是 9.5%利率的商业贷款得到.

在表 E2-3-3 中，我们看到了三个财务计划的数据. 我们假设运营收入是已用资本额的 20%，税收是利息后收入的 40%. 我们允许运营收入在每个计划中增加和减少 25%，股份数假设是 5000.

表 E2-3-3 三种财务计划的财务杠杆和每股收益

财务计划	总资本 (\$)	股票 EQ(\$)	债务 D(\$)	运营收入 OY(\$)	利息 I 9.5% (\$)	OY−I (\$)	税 T 40%	净收入 NY (OY−I−T) (\$)	资本回报率 NY/EQ (%)	每股收益 NY/股数	DFL
计划Ⅰ	100 000	100 000	0	20 000	0	20 000	8000	12 000	12	2.40	
OY 25%↑	100 000	100 000	0	25 000	0	25 000	10 000	15 000	15	3	1.25
OY 25%↓	100 000	100 000	0	15 000	0	15 000	6000	9000	9	1.8	1
计划Ⅱ	100 000	66 000	34 000	20 000	3230	16 770	6708	10 062	15.2	2.01	
OY 25%↑	100 000	66 000	34 000	25 000	3230	21 770	8708	13 062	19.8	2.61	1.49
OY 25%↓	100 000	66 000	34 000	15 000	3230	11 770	4708	7062	10.7	1.41	1.19
计划Ⅲ	100 000	34 000	66 000	20 000	6270	13 730	5492	8238	24.2	1.65	
OY 25%↑	100 000	34 000	66 000	25 000	6270	18 730	7492	11 238	33	2.25	1.82
OY 25%↓	100 000	34 000	66 000	15 000	6270	8730	3492	5238	15.4	1.05	1.45

数据表明，公司使用负债支持推广项目，资产回报率从计划Ⅱ中 15.2%升到了计划Ⅲ中 24.2%，即升幅达 60%. 而且，当运营收入增加 25%时，资产回报率计划Ⅱ中增加 30%(从 15.2%到 19.8%)，在计划Ⅲ中增加 36%(从 24.2%到 33%). 杠杆的增加引起了 EPS 的增加，这也是十分显著的. 也就是说，相对于运营收入增长 1%，EPS 的增长在整个计划用 DFL 表示，从 1.25 增长到 1.49，再增长到 1.82. 逆向地，杠杆作用的减小引起 EPS 下降. 当我们使用较高的负债(从计划Ⅱ到计划Ⅲ)，收入和收入减少二者的 EPS 影响是更戏剧化的.

2.4 总杠杆或组合杠杆

我们已经看到销售收入的变化已经引起了公司运营收入很大的变化，而运营收入的变化又引起了每股收益的变化．使用运营杠杆和财务杠杆将强化公司每股收益的影响，这是很符合逻辑的结论．因此，两种杠杆类型的组合影响就是我们所称的**总杠杆(组合杠杆)**．它被定义为运营和财务两者的固定成本对销售在每股收益上的放大影响的潜在用途．图 2-2 表明通过运营收入变化或者利用了运营和财务两种杠杆的 EBIT，销售和每股收益之间的联系．

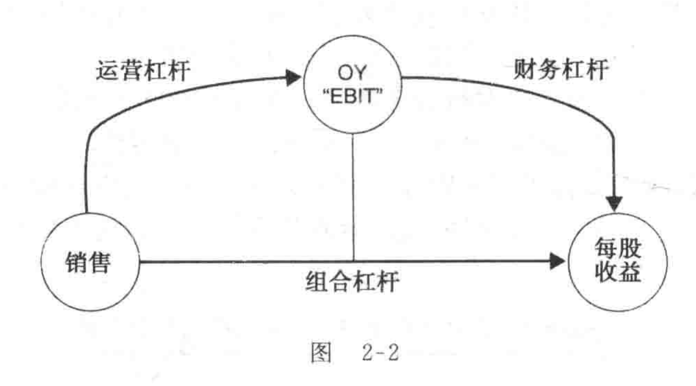


图 2-2

我们能看到在销售收入的变化和每股收益的变化之间，有一种最终的、能直观化为线性的总杠杆或组合杠杆．组合杠杆的程度(DCL)能用运营杠杆程度(DOL)和财务杠杆程度(DFL)的乘积得到．

$$\mathrm{DCL}=\mathrm{DOL}\cdot\mathrm{DFL}$$

$$\mathrm{DCL}=\frac{\%\Delta \mathrm{OY}}{\%\Delta S}\cdot\frac{\%\Delta \mathrm{EPS}}{\%\Delta \mathrm{OY}}$$

消去%ΔOY，我们得到

$$\mathrm{DCL}=\frac{\%\Delta \mathrm{EPS}}{\%\Delta S}$$

$$\mathrm{DCL}=\frac{[(\mathrm{EPS}_2-\mathrm{EPS}_1)/\mathrm{EPS}_1]\times 100}{[(S_2-S_1)/S_1]\times 100}$$

$$\boxed{\mathrm{DCL}=\frac{\mathrm{EPS}_2-\mathrm{EPS}_1}{\mathrm{EPS}_1}\cdot\frac{S_1}{S_2-S_1}}$$

例 2.4.1 在过去两年中，一家小公司销售收入从 88 000 美元增加到 96 000 美元，它的每股收益也从 1.05 增加到 1.56，组合杠杆程度是多少？

$$\boxed{\mathrm{DCL}=\frac{\mathrm{EPS}_2-\mathrm{EPS}_1}{\mathrm{EPS}_1}\cdot\frac{S_1}{S_2-S_1}}$$

$$=\frac{1.56-1.05}{1.05}\left(\frac{88\,000}{96\,000-88\,000}\right)=5.34$$

这意味着公司的销售每改变 1%，每股收益将改变 5.34%．

我们也可以使用下面的公式得到组合杠杆程度或总杠杆程度：

$$\boxed{\text{DCL} = \frac{Q(p-v)}{Q(p-v) - \text{FC} - I - [D_{\text{ps}}/(1-T)]}}$$

其中，Q 是给定产量，P 是单位生产价格，v 是每生产单位可变成本，FC 是固定成本，I 是利息，D_{ps}是优先股分红，T 是税率.

例 2.4.2 一家公司有 600 美元固定成本和每单位 1.5 美元可变成本. 它支付 8210 美元债务利息，以 36%的比率支付收入税，支付 10 000 美元的优先股分红. 如果它以每件 6.50 美元销售商品 15 000 件，组合杠杆程度是多少?

$$\begin{aligned}\text{DCL} &= \frac{Q(p-v)}{Q(p-v) - \text{FC} - I - [D_{\text{ps}}/(1-T)]} \\ &= \frac{15\,000(6.50-1.50)}{15\,000(6.50-1.50) - 6000 - 8210 - [10\,000/(1-0.36)]} \\ &= 1.66\end{aligned}$$

单元五附录

小结

盈亏平衡点是一项指导商业销售水平的技术，要求支付所有的运营成本，并且评估公司盈利能力. 从技术上看，盈亏平衡点就是销售收入等于生产总成本的位置，是利润等于零的点. 因此，在该点之前所有的生产和销售都是亏本的，当销售超过这个点才开始产生盈利. 这个点能够用生产量、收入额和时间来表示. 它也能用现金表示，在这种情形中像折旧这种非现金费用要从固定成本中扣减. 如果事先确定了盈利额，也可以得到盈亏平衡收益和生产数量. 这一单元解释了盈亏平衡点的一些重要应用，例如：公司发生借贷时盈亏平衡计算；当收入和成本函数或者它们中至少一个是非线性的时候，就会产生多于一个盈亏平衡点；盈亏平衡和股票销售决策；提前退休决策中的盈亏平衡.

本单元对部分变量的盈亏平衡产量和收入灵敏性，以及盈亏平衡分析的局限都涉及了. 杠杆是与盈亏平衡分析关系密切的自然主题. 本单元解释了三种关于固定成本和商业风险用处的杠杆类型. 运营杠杆定义为固定成本的潜在用途，将放大销售变化对运营收入的影响，导致固定成本和杠杆程度是正相关的. 固定成本越高，运营杠杆程度越高. 运营杠杆程度和商业风险水平直接相关.

第二种类型杠杆是财务杠杆. 它被定义为固定财务成本的潜在用途，比如商业负债的利息和优先股的分红，放大了运营收入变化对商业每股收益的影响. 这也导致了运营收入和每股收益之间的直接正相关关系. 固定财务成本越高，直接关系到商业风险水平的财务杠杆程度就越大.

第三种类型杠杆是总杠杆，是运营杠杆和财务杠杆的组合. 它被定义为固定成本(运营和财务两者)的潜在用途，放大了销售变化对商业每股收益的影响：总的固定成本越高，总杠杆程度越大，商业风险水平也越大. 那些递增的商业风险水平也带来了巨大的利益，既推动了资产收入的增长，也推动了每股收益的增长.

公式列表

盈亏平衡产量：

$$\mathrm{BEQ} = \frac{\mathrm{FC}}{p-v}$$

现金盈亏平衡产量：

$$\mathrm{CBEQ} = \frac{\mathrm{FC}-\mathrm{NC}}{p-v}$$

具有盈利目标的盈亏平衡产量：

$$\mathrm{BEQ}_{\mathrm{tp}} = \frac{\mathrm{FC}-\mathrm{TP}}{p-v}$$

盈亏平衡收益：

$$\mathrm{BER} = \frac{\mathrm{FC}}{1-(v/p)}$$

$$\mathrm{BER} = \mathrm{BEQ} \cdot p$$

边际贡献：

$$\mathrm{CM} = p-v$$

具有盈利目标的盈亏平衡收益：

$$\mathrm{BER_{tp}} = \frac{\mathrm{FC}+\mathrm{TP}}{1-(v/p)}$$

盈亏平衡时间：

$$\mathrm{BET} = \frac{\mathrm{FC}+pqt_L}{q(p-v)}$$

在利润和借款利息成本之间的盈亏平衡时间：

$$t = \frac{\mathrm{FC}+pqt_L+rt_0(\mathrm{FC}+vqt_L)}{q(p-v)-r(\mathrm{FC}+vqt_L)}$$

股票买卖的盈亏平衡：

$$y_b = \frac{x(1+\mathrm{ip})}{1-\mathrm{is}}$$

提前退休的盈亏平衡：

$$t_b = \frac{\mathrm{RP}\cdot t_e}{\mathrm{RP}-\mathrm{EP}}$$

调整后年金的盈亏平衡：

$$t_b^{\mathrm{adj}} = \frac{\ln[(\mathrm{RP}-\mathrm{EP})/\mathrm{RP}(1+r)^{-t_e}-\mathrm{EP}]}{\ln(1+r)}$$

运营杠杆程度：

$$\mathrm{DOL}=\frac{\mathrm{OY}_2-\mathrm{OY}_1}{\mathrm{OY}_1}\cdot\frac{S_1}{S_2-S_1}$$

$$\mathrm{DOL}=\frac{Q(p-v)}{Q(p-v)-\mathrm{FC}}$$

财务杠杆程度：

$$\mathrm{DFL}=\frac{\mathrm{EPS}_2-\mathrm{EPS}_1}{\mathrm{EPS}_1}\cdot\frac{\mathrm{OY}_1}{\mathrm{OY}_2-\mathrm{OY}_1}$$

$$\mathrm{DFL}=\frac{\mathrm{OY}}{\mathrm{OY}-\left[I+\left(\frac{D_{\mathrm{ps}}}{1-T}\right)\right]}$$

组合(总)杠杆程度：

$$\mathrm{DCL}=\frac{\mathrm{EPS}_2-\mathrm{EPS}_1}{\mathrm{EPS}_1}\cdot\frac{S_1}{S_2-S_1}$$

$$\mathrm{DCL}=\frac{Q(p-v)}{Q(p-v)-\mathrm{FC}-I-[D_{\mathrm{ps}}/(1-T)]}$$

习题

1. 一家公司固定运营成本是 5700 美元，可变运营成本是每单位 1.95 美元，给定每单位产品销售 7.00 美元，求盈亏平衡产量.
2. 如果上述公司固定成本保持为 5700 美元，但是可变成本增加到每单位 2.65 美元，现在产品以 9.00 美元销售. 计算该公司的盈亏平衡收益.
3. 一小商家如果每单位产品以 29 美元在市场上销售，求盈亏平衡产量和盈亏平衡收益.

项目	频率	成本($)
租费	每年	50 400
财产税	每季	1200
保险	半年	2340
薪水	每周	3800
员工福利	每年	12 000
工资	每单位	6.75
材料	每单位	7.50
交通	每单位	2.25
海运	每单位	1.12

4. 假设练习 3 中的公司折旧费合计有固定成本的 15%，现金盈亏平衡产量(CBEQ)将是多少?
5. 如果练习 4 中的公司管理层设定 55 000 美元是必须达到的盈利目标，求盈亏平衡产量和

盈亏平衡收益.

6. Steve 开了一家建造客户邮箱的小木材商店，他有如下成本：
   固定成本：每月 3000 美元
   两个助手：每周工作 40 个小时、每年 40 周，每小时 12 美金
   材料：每个邮箱 10 美元
   费用：每个邮箱 1.00 美元
   如果他以每个邮箱 30 美元来销售，计算公司的：
   (a) 边际贡献
   (b) 盈亏平衡产量
   (c) 盈亏平衡收益
   (d) 如果他想赚 5000 美元利润，计算盈亏平衡产量和收益，并绘出盈亏平衡图.
7. 假设在练习 6 中，Steve 也决定做鸟巢. 他可以一天做 7 个鸟巢，每个鸟巢 3 美元可变成本，给定其固定成本保持在 3000 美元，他可以以每个 10 美元进行出售，但他必须等待 10 天才能收到其回报，计算
   (a) 盈亏平衡时间
   (b) 盈亏平衡收益
   (c) 盈亏平衡产量
8. 一家玩具公司一天生产 1000 只玩具，固定成本是 50 000 美元，可变成本每只玩具 8 美元，市场售价是 15 美元. 这家公司的销售收入直到生产后 30 天才能收到，但是公司已经在生产前 50 天得到了一笔利率为 8.5%、期限为 3 年的贷款. 计算这家公司的盈亏平衡点.
9. 一位投资者以每股 35 美元的价格，购买了某种股票 150 股，支付了一笔 4%的佣金. 假设出售佣金和购买佣金有相同的比率，求该投资者的盈亏平衡销售价格. 验证你的答案.
10. 一个人提前 4 年退休，得到 62 000 美元. 相反，如果他准时退休，则得到 71 000 美元. 确定这个人的盈亏平衡点.
11. 假设练习 10 中这个人的公司因为生活成本调节退休金 3.25%，他要等待多久提前退休金和全额退休金才会相等?
12. 下面列出了公司在年 1 和年 2 之间销售收入和运营收入的变化. 求运营杠杆程度.

年度	OY	S
1	15 000	65 000
2	185 000	90 000

13. 一家公司销售变化的百分数为 35%，运营收入变化的百分数是 46%，确定该公司的运营杠杆程度.
14. 一家公司给定了如下数据，求财务杠杆程度.

项目	A 年	B 年
股数	50 000	50 000
毛收入($)	72 000	79 000
运营收入($)	22 500	23 900
利息($)	5620	6850
所得税($)	20 160	22 120

15. 如果 DOL=4.8，%ΔOY=57，而且%ΔEPS=43，计算组合杠杆程度(DCL).

单元六 *Unit 6*

投　资

第 1 章　股票

第 2 章　债券

第 3 章　共同基金

第 4 章　期权

第 5 章　资本成本和比率分析

第1章 股　　票

为了维持稳定的抵押资产净值，商业性公司特别是那些大公司之类的厂商，通常都会通过稳定收入的内部途径满足资本的金融需求，但除此之外也可以采取外部途径．公司通过发行和买卖股票和债券来筹集他们需要的资金，这些资金被用于投资启动项目、维持日常持续的开销所需和扩张项目的资金花费．股票和债券是两种主要的可协商所有权的有价证券．对长期投资有兴趣的投资者在市场上买卖股票和债券，希望能够通过获得公司利润的份额——股息和投资价值升值时的资本利得来赚得收入．投资者为了确保投资安全和更好地获得回报，必须专心并敏捷地密切关注价格的频繁变动，同时关注股票和债券的运行趋势．这一章我们主要集中在与股票有关的数学运算，之后的几章我们也会介绍债券和其他种类的有价证券．

对于企业来说，股票是一种主要的资产资本的外部来源，资产资本有对公司收入的要求，也有对二级市场资产的要求，这是普通商业债权人的声明．对于投资者来说，股票是一种公司资产所有权的份额，也是公司收入的份额，因此是个人收入的来源之一．股票分为两种类型：普通股和优先股．**普通股**是股份公司所有权最基本的一种形式，它代表公司资金增值的能力，同时，也代表着对公司最低限度的约束．正是因为如此，相较于优先股而言，普通股的持股人拥有更高的股息和表决权．公司里的表决权意味着持股人能够参与公司主要决策的制定，参与公司职员的选举任免，参与公司管理和评估公司发展状况．持股人所持股份的数量与表决权的效力相称．普通股可以被私人或公众持有，并且有不同的级别和种类．

优先股是一种固定收入类型的股票．公司收入中的固定百分比或固定份额作为优先股的股息分给优先股的持股人．公司有义务在支付普通股股息之前支付优先股的股息．然而，这种优先权利的获得是以表决权的限制为代价的．优先股其他可知的缺点是其相对较高的费用和市场价格对利率波动的敏感性．然而，正如我们接下来会详细看到的，从股份公司的角度来说优先股一个很大的优点是其能够增强公司的影响力．

1.1　买卖股票

普通股持有人的主要目的是赚钱，他们不但依靠收取股息赚钱，而且通过在恰当的时机买卖正确股票，从而通过交易来赚取资本利得．此时的基本前提是，他们在股票被低估时愿意买入．也就是说，此时预期股票的真实价值高于其市场价格．持股人也需要在股票价值被高估的时候卖出，此时意味着持股人认为这些股票的真实价值低于市场上的售出价格．

因此，投资者不仅仅需要关注市场变动和价格波动，还需要关注手续费、经纪人佣金以及这些费用的计算方式．在股票交易市场，经纪人佣金建立在股票的市场价格和买卖数量的基础上．经纪费率通常是固定费用和可变费用的组合．固定费用部分会随着买卖的增

加而增加，而那些通常以百分比计算的可变部分会随着买卖数量的增加而减少. 表 1-1 展示了此种变化.

表　1-1

采购/销售金额($)	经纪费率		
	期初费用($)	+	%
→2500	25		0.015
2501～6000	50		0.007
6001～22 000	70		0.006
22 001～50 000	90		0.004
50 001～500 000	150		0.002
500 000→	250		0.001

例 1.1.1　Dale 以每股 25.75 美元的价格购买了 Pizza 公司 350 份普通股，随后以每股 29.25 美元的价格卖出 200 份. 求他的资本利得和投资回报率.

1. 总投资费用：

$$350 \times \$25.75 = \$9012.50 \quad \text{最初投资支出}$$
$$\$9012.50 \times 0.006 = \$54.08 \quad \text{购买的佣金百分比}$$
$$\$70 + \$54.08 = \$124.08 \quad \text{总佣金费用}$$
$$\$9012.50 + \$124.08 = \$9136.58 \quad \text{总投资支出}$$

2. 净销售额

$$200 \times \$29.25 = \$5850 \quad \text{总销售额}$$
$$\$5850 \times 0.007 = \$40.95 \quad \text{销售的佣金百分比}$$
$$\$50 + \$40.95 = \$90.95 \quad \text{销售的总佣金}$$
$$\$5850 - \$90.95 = \$5759.05 \quad \text{净销售}$$

3. 200 份卖出股份的费用

$$\$9136.50 \times \frac{200}{350} = \$5220.85$$

4. 资本利得

$$\$5759.05 - \$5220.86 = \$538.19 \quad \text{资本利得}$$

5. 收益率

$$\frac{\$538.19}{\$5220.85} = 10.3\%$$

要注意到最初我们并没有得出这 200 份股票的费用，因为经纪人佣金位于图表的第二行. 但是在现实中，这总的 350 份股票买入时的费用建立在表中第三行的基础上. 这就是为什么我们仅仅能计算出他买入的总的 350 份股票中卖出的 200 份的费用的缘由.

例 1.1.2　假如有一位新的投资者决定用 5000 美元购买一定数量的股票并支付其费用. 如果佣金费用为固定费用 50 美元再加变动费率 0.007%，求：(1)如果每股售价 28.58 美元，他能买到多少股？(2)如果这些股票每股支付红利 2.33 美元，那他的收益为多少？

首先，我们要先确定他的净投入，也就是说从他的 5000 美元中扣除佣金的部分.

$$NI + 0.007NI + 50 = \$5000$$

$$NI(1 + 0.007) = \$4950$$

$$NI = \frac{\$4950}{1.007} = \$4915.60 \quad \text{净投入}$$

股票价格为每股 28.50 美元，所以我们能计算出买入的股票数量：

$$\frac{\$4915.60}{\$28.58} = 172 \quad \text{股}$$

他的总分红为：

$$172 \times \$2.33 = \$400.76$$

他的投资收益为：

$$\frac{\$400.76}{\$5000} = 8\%$$

1.2　普通股估价

不论某种股票是否在证券交易所进行交易，股票价值的估计都是必不可少的. 不管是为了买卖的目的，还是为了其他经济目的，诸如财产税的估价和新股票保险，发现股票这种有价证券的价格或是价值都是非常重要的. 考虑普通股一股现值的主要前提是，应该用未来现金流量的现值来估计现值，这些现金流也就是未来将要支付的股息. 如果某投资者以价格 P_0 购买了某种股票，她期望在这次持有股票的过程中能够获得股息 D. 股票没有到期日，所以未来获得的股息是开放的. 另一位投资者期望她的股票在未来能够卖出一个更高的价钱，从而她能从股票价格增值中获得资本利得. 投资者期望从他们的投资中获得的收益率被称为**市场资本化率**(MCR)、**期望率**(Er)，或仅仅称为**收益率**(r). 它由以下公式决定.

$$\text{MCA} = \text{Er} = r = \frac{D + \text{PA}}{P_0}$$

D 为每份股份的期望股息，PA 为买入股票后股票的价格增值，这种增值通常由现在买入价 P_0 与股票购买一年后的期望价格 P_1 的差额得到.

$$\text{PA} = P_1 - P_0$$

因此，公式可以调整为：

$$\boxed{r = \frac{D + P_1 - P_0}{P_0}}$$

这就是投资者的年期望收益率. 它衡量了两种典型的回报：每股预期现金红利和资本利得，这里权衡了二者相对于股票的原始购买价格(P_0).

例 1.2.1　Gill 以每股 75 美元的价格买入了当地一家公司 50 股的股票. 他期望年末能得到每股 4 美元的股息，并且期望能卖出每股 80 美元的价钱. 他的期望收益率是多少？

$$r = \frac{D + P_1 - P_0}{P_0} = \frac{\$4 + \$80 - \$75}{\$75} = 12\%$$

如果考虑全部的股票，我们也可以得到收益率

$$50 \times \$75 = \$3750 \quad 买入价$$
$$50 \times \$80 = \$4000 \quad 卖出价$$
$$50 \times \$4 = \$200 \quad 总期望股息$$
$$r = \frac{\$200 + \$4000 - \$3750}{\$3750} = 12\%$$

从数学上可以知道，只要其他变量可知，一个公式中任何变量都能求得. 假设我们给出下一年的股票价格(P_1)、股息(D_1)、市场收益率(r)的预测值，是不是就意味着我们能算出股票的现价(P_0)? 从技术上讲，确实是的. 现价(P_0)为

$$P_0 = \frac{D_1 + P_1}{1 + r}$$

这种方法主要是把未来收入贴现到现期价值上. 我们也能够根据下一年期望的股息(D_2)和价格(P_2)计算出下一年的价格(P_1)

$$P_1 = \frac{D_2 + P_2}{1 + r}$$

并且，如果把 P_1 放到上面 P_0 的公式中，可以得到

$$P_0 = \frac{1}{1+r}(D_1 + P_1) = \frac{1}{1+r}\left(D_1 + \frac{D_2 + P_2}{1+r}\right)$$
$$= \frac{1}{1+r}\left[D_1 + \frac{1}{1+r}(D_2 + P_2)\right] = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2 + P_2}{(1+r)^2}$$

如果继续得到接下来一年(第三年)的估计值，可以得到

$$P_0 = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \frac{D_3 + P_3}{(1+r)^3}$$

类似地，对未来的任意年数都这样处理，比如说 k 年. 如果我们把 P_2 代入 P_3 的项，用 P_3 代入 P_4 的项，并以此类推，那么所有的 P 的序列都会被消掉，最后的结果为

$$P_0 = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{D_k + P_k}{(1+r)^k}$$

最后总和为

$$P_0 = \sum_{t=1}^{k} \frac{D_t}{(1+r)^t} + \frac{P_k}{(1+r)^k}$$

这意味着股票的当前价格实际上等于未来用周期 k 定义的年数所有股息贴现值的总和. 值得注意的是，如果 k 值连续增加并趋近于无穷，那么最后一项将会接近 0，因此最后一项可以被消除，公式转化为

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+r)^t}$$

这意味着普通股的现值就像其他资产的现值一样，由未来股息现金流的贴现值决定. 然而，这个结论的得出以股息的零增长为前提假设. 换句话说，未来几年的股息都保持在一个常数值上. 它暗示了所有年份的 D 都是相同的，因此公式如下

$$P_0 = D_1 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t}$$

另外，$\sum_{t=1}^{\infty}[1/(1+r)^t]$ 是 r 和 t 的现值利息系数(PVIF)，公式又可以写为

$$P_0 = D_1(\mathrm{PVIF}_{r,t})$$

$$\boxed{P_0 = \frac{D_1}{r}}$$

例 1.2.2 如果 Bright Paint 公司的股票可以支付每股 14.95 美元的股息，并且预期股息一直都是无限期的常数，那么在必要收益率为 11.5%的条件下股票价值为多少？

$$P_0 = \frac{D_1}{r} = \frac{\$14.95}{0.115} = \$130.00$$

但是如果股息以固定的增长率增长，设增长率为 g，$D+Dg=D(1+g)$，普通股的现值就会被调整为

$$P_0 = \frac{D_1(1+g)}{1+r} + \frac{D_2(1+g)^2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{D_k(1+g)^k}{(1+r)^k}$$

最后我们得到

$$\boxed{P_0 = \frac{D_1}{r-g}} \quad r > g$$

在这里，我们假设必要收益率(r)或者市场资本化率都比期望的股息固定增长率(g)大. M. J. 戈登和 E. 夏皮罗共同发表了一篇名为“资本设备分析：必要利润率”的文章，这篇文章在 1956 年刊登于《管理科学》杂志，后来这个公式便被称为**戈登公式**. 一开始这个公式是由 J. B. 威廉在他的书《投资价值理论》中提出来的，这本书在 1938 年由哈佛大学出版社出版，但是它一直不怎么出名，直到戈登和夏皮罗在 18 年以后将其再次发现.

因为 $D_1=D_0+D_0g$，$D_1=D_0(1+g)$，所以我们可以把之前的公式写为

$$\boxed{P_0 = \frac{D_0(1+g)}{r-g}}$$

例 1.2.3 假如一个投资者想要从一个预计增长率为 8%的股票中获得 12%的收益，售出股票的这个公司预计把赚得的收入中的 60%用于股息支付，并且每股收益是 3.2 美元，此公司每股售出价为 40 美元. 此股票的价值为多少？预期收益为多少？

首先，我们从每股收益中获得 60%的股息

$$D_0 = \$3.20 \times 0.60 = \$1.92$$

$$\text{股票的现价是：} P_0 = \frac{D_0(1+g)}{r-g} = \frac{\$1.92(1+0.08)}{0.12-0.08} = \$51.84$$

$$\text{预期收益是：} r = \frac{D}{P_0} + g = \frac{\$1.92}{\$40} + 0.08 = 12.8\%$$

注意，我们使用实际的股票价格 40 美元作为 P_0，而不是预计的现价(51.84 美元). 然而，值得注意的是 r(经常作为股票成本的市场资本化率)能直接从戈登公式中推出来.

$$r=\frac{D_1}{P_0}+g$$

例 1.2.4 Big Book 公司的普通股售价 55 美元，2010 年的股息为 4.30 美元，其股息在接下来的五年内的增长如表 E1-2-4 所示．此普通股的费用为多少？

表　E1-2-4

年份	股息（$）
2009	4.00
2008	3.75
2007	3.33
2006	3.15
2005	2.95

从过去股息收入的历史看，我们能算出 g（从 2005 年到 2009 年的增长率）：

$$g=\sqrt[n]{\frac{\mathrm{FV}}{\mathrm{CV}}}-1=\sqrt[4]{\frac{\$4.00}{\$2.95}}-1=0.08$$

$$r=\frac{D_1}{P_0}+g=\frac{\$4.30}{\$55}+0.08=15.8\%$$

还有另外一种方法得出 g 值．实际上，D_1/P_0 是股息收益，股权收益(ROE)乘上利润再投资率(Plow)可以得出 g

$$g=\mathrm{ROE}\times\mathrm{Plow}$$

其中，ROE 等于每股收益除以每股权益

$$\mathrm{ROE}=\frac{\mathrm{EPS}}{\mathrm{Eq}}$$

Plow 是股息支付率(Pout)的补充

$$\mathrm{Plow}=1-\mathrm{Pout}$$

股息支付率等于期望股息(D_1)除以每股收益(EPS)

$$\mathrm{Pout}=\frac{D_1}{\mathrm{EPS}_1}$$

例 1.2.5 某只股票售价每股 35.00 美元，下一年年末的期望股息收益是每股 1.15 美元，公司每股赚得 2.30 美元．每股的账面价值为 14.50 美元．市场资本化率或此股票的费用为多少？

$$\mathrm{ROE}=\frac{\mathrm{EPS}}{\mathrm{Eq}}=\frac{\$2.30}{\$14.50}=16\%$$

$$\mathrm{Pout}=\frac{D_1}{\mathrm{EPS}_1}=\frac{\$1.15}{\$2.30}=0.50$$

$$\mathrm{Plow}=1-\mathrm{Pout}=1-0.50=0.50$$

$$g=\mathrm{ROE}\cdot\mathrm{Plow}=0.16\times0.50=0.08$$

$$r=\frac{D_1}{P_0}+g=\frac{\$1.15}{\$35}+0.08=11.3\%$$

1.3　新发行普通股的成本

新发行普通股的成本不仅由相同市场资本化率公式所决定，更要考虑到下面这些因素：

1. 被低估的股票以低于当时市价(P_0)的价格被售出．对于公司来说，为了售出新股这似乎是必要的．折价量(Un)等于现价(P_0)和新价格(P_n)的差额．

$$\mathrm{Un} = P_0 - P_n$$

2. 发行成本(FC)是指发行和售出新股的成本．

因此，如果股票价格扣除了上述两个因素，就能得到**净收益**(N_n)．在计算发行新股的成本(r_n)的新公式中净收益(N_n)代替 P_0．

$$\boxed{r_n = \frac{D}{N_n} + g}$$

例 1.3.1　假如在例 1.2.5 中有一只新发行的股票，公司决定以每股 1.55 美元的价格折价发行，并且预计每股的发行成本为 0.75 美元．计算这只普通股新的发行费用．

$P_0=55$；Un$=1.55$；Fc$=0.75$ 美元；$D_1=4.30$ 美元；$g=0.08$

$$N_n = P_0 - (\mathrm{Un} + \mathrm{Fc}) = 55 - (\$1.55 + \$0.75) = \$52.70$$

$$r_n = \frac{D}{N_n} + g = \frac{\$4.30}{\$52.70} + 0.08 = 16.2\%$$

可以看到，新股发行的费用要高于现有股票的成本．因为需要从新的净收益中除去股息，而新发行的股票的股息要小于现在的股票．

1.4　具有两个阶段股息增长的股票价值

戈登公式假设股息的期望收益率(g)低于必要收益率或者市场资本化率(r)．但是假如在某一时刻，收入和股息增长显示出一个非常高的增长率，g 足以超过 r．在这种情况下，戈登公式将算出一个负的股票价值，这也是为什么我们应该使用两个阶段股息增长公式来估计股票价值的原因．两个阶段的股息增长把增长区分为两个阶段，并且通过计算第一年到第 n 年股息的现值，以及计算第 $n+1$ 年到无穷的股息现值，把二者结合起来估计股票的价值．

$$\boxed{P_0 = D_0 \cdot \frac{1-[(1+g_1)/(1+r)]^n}{r-g_1}(1+g_1) + D_{n+1}\left(\frac{1}{r-g_2}\right)\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}$$

例 1.4.1　计算 SURE 公司普通股的每股现值．接下来的 5 年期望股息增长率为 25%，之后降低到 5%．已知每股股息为 37.00 美元，必要收益率为 15%．

$$g_1 = 0.25;g_2 = 0.05;D_0 = 37.00\text{ 美元};r = 0.15;n = 5$$

$$P_0 = D_0 \cdot \frac{1-[(1+g_1)/(1+r)]^n}{r-g_1}(1+g_1) + D_{n+1}\left(\frac{1}{r-g_2}\right)\left(\frac{1}{1+r}\right)^n$$

$$= 37\left[\frac{1-[(1+0.25)/(1+0.15)]^5}{0.15-0.25}\right](1+0.25)$$

$$+37(1+0.25)^5(1+0.05)\left(\frac{1}{0.15-0.05}\right)\left(\frac{1}{1+0.15}\right)^5$$
$$= \$239.23 + \$589.46 = \$828.69$$

1.5 通过 CAPM 模型计算股票成本

资本资产定价模型(CAPM)致力于刻画有关必要收益率(或者在这个背景下普通股成本)和公司面临的全部风险中的不可分散部分之间的关系. 不可分散的风险是资产风险的外在部分，可归于公司之外的环境和行业中所有公司都受影响的条件，因此不能通过一般情况下的证券投资组合的多样化来减少或消除. 在模型中用贝塔(β)系数表示，它作为一个指数衡量了在市场收益率变化的情况下资产收益的变化性. 按照这个模型，必要收益率或普通股的成本(r_c)如下.

$$\boxed{r_c = R_f + \beta(R_m - R_f)}$$

成本通常分为两部分，一部分是由美国短期国库券收益率决定的无风险收益率(R_f)，另一部分是风险溢价 $\beta(R_m - R_f)$，即市场收益率 R_m 和无风险收益率 R_f 的差额经过 β 调整后的结果.

例 1.5.1 如果 Joyland 公司的普通股的 $\beta=1.70$，市场收益率为 12%，利用资本资产定价模型计算其成本. 给出的无风险收益率为 8%.

$$R_f = 8\%,\ R_m = 12\%,\ \beta = 1.70$$
$$r_c = R_f + \beta(R_m - R_f) = 0.08 + 1.70(0.12 - 0.08) = 14.8\%$$

1.6 普通股估价的其他方法

市盈率(P/E)倍数法

使用市盈率倍数法时，公司普通股价值(V_c)可以通过经常显示在标准财务报表上行业的价格利润比(P/E_i)来衡量. 股票价值(V_c)可以通过每股期望收益(EPS_e)乘以行业的 P/E 来得到：

$$\boxed{V_c = \mathrm{EPS}_e(P/E_i)}$$

这种方法更加适用于没有公开上市的公司.

例 1.6.1 一个列车服务公司期望其每股收益为 3.10 美元，同时陆路运输行业的价格利润比为 9. 对于这个列车服务公司的股票每股价值最好的估计为多少?

$$V_c = \mathrm{EPS}_e(P/E_i) = \$3.10 \times 9 = \$27.90$$

每股账面价值方法

每股账面价值方法建立在一种假设条件下：如果所有资产都是流动的，并且包括优先股在内的所有负债都付清了，那么公司每股股票价值的最好估计是从公司净收入中股票持有人得到的每股份额. 资产和负债在公司的账面上已经记载了其会计价值. 这也是为什么

这种方法被称为每股账面价值方法的原因.

例 1.6.2　ABC公司的账面显示总资产为 270 万美元，总负债为 120 万美元. 公司的优先股股息将达到 650 000 美元，并且其还拥有 85 000 股普通股份额. 每股价值为多少?

$$V_c = \frac{\$2\,700\,000 - (\$1\,200\,000 + \$650\,000)}{85\,000} = \$10.00$$

每股清算价值方法

除了**每股清算价值方法**是真实的而不是假设的之外，它恰好和每股账面价值方法是一样的. 它与公司确切已偿付的每股价值相关.

例 1.6.3　某公司的一小组负责处理公司的资产清算报告，在他们支付了包括优先股在内的所有负债后，依然有 230 万美元的负债. 公司打算分配这些净收益给 110 000 股普通股. 因此每股价值为

$$V_c = \frac{\$2\,300\,000}{110\,000} = \$20.91$$

1.7　优先股价值

因为优先股没有到期日，只要股票是未偿付的，就要支付优先股固定的股息，股息支付可以被看作永恒的，因此我们可以据此写出优先股价值的公式(P_p)如下

$$P_p = D_p\left(\frac{1}{r_p}\right)$$

$$\boxed{P_p = \frac{D_p}{r_p}}$$

例 1.7.1　Wide Range 公司支付给优先股持有人固定的 7.50 美元的年股息. 如果估计出来的必要收益率为 14.5%，那这只优先股股票的价值为多少?

$$P_p = \frac{D_p}{r_p} = \frac{\$7.50}{0.145} = \$51.72$$

1.8　优先股费用

优先股费用可以用必要收益率来表示，而必要收益率可以通过整理先前公式得到

$$r_p = \frac{D_p}{P_p}$$

但是我们不使用优先股价值(P_p)，而是使用纯收入(N_p)，纯收入是由 P_p 减去发行成本(FC)得到：

$$N_p = P_p - \mathrm{FC}$$

正确的公式变为

$$\boxed{r_p = \frac{D_p}{N_p}}$$

例 1.8.1 如果 XYZ 公司把优先股 96 美元面值的 9%作为其股息，并且发行和卖出此股票的费用为 4.00 美元，此股票的总费用为多少？

$$D_p = 0.09 \times (\$96) = \$8.64$$

$$N_p = \$96 - \$4 = \$92$$

$$r_p = \frac{D_p}{N_p} = \frac{\$8.64}{\$92} = 9.4\%$$

第2章 债　　券

债券是资本市场上交易的主要有价证券之一．债券是一种长期投资工具，通常由大型公司和政府发行、卖给不同贷方群体，主要目的是筹集大量资金．债券由借方（政府或者企业）承诺支付给贷方（个人或机构投资者）：

1. 在未来一个被叫作到期日或偿还日的特定日期或之前借入的全部金额，这个金额通常被称为**赎回价值**，并写在债券的票面上，被称为**债券面值**．它的面额通常是1000美元或其倍数．
2. 以票面价值计算半年利息进行一系列固定数额的现金支付．计息时通常使用债券利率或息票利率，也称为合约利率，这个利率通常以年的形式表现．直到借入金额被赎回之前，在整个到期期间都要支付利息．

债券的发行年限一般在10年以上．债券支付通常分为半年付和在固定日期支付的利息（这个固定日期被称为**付款日期**或**息期**）．

2.1 债券估价

投资者在整个到期期间内收到了利息支付，并且在偿还日收到了名义本金，所以在买入时债券的价值应该由未来利息支付的现值加上赎回金额的现值来评估．假如一个10年期的债券面值为1000.00美元，票面利率为8%．每年的利息为：

$$\$1000 \times 0.08 = \$80$$

但是利息支付是每半年计息一次，所以接下来的20期每一次的支付为40美元．最后一期支付应该为第20次的利息支付40美元加上原始的借入金额1000美元，也就是1040美元．

第1年		第2年		→	第9年		第10年		
第1期	第2期	第3期	第4期	→	第17期	第18期	第19期	第20期	
40	40	40	40	→	40	40	40	40	1000

这只债券在买入时的价值（B_0）等于上表中显示的未来现金流的现值．因此，如果把利息支付和到期偿还金额贴现到现值，使用半年计息一次的利率0.04（0.08/2）和到期时间20（10×2），我们就能得到面值为1000美元的债券的现值：

$$\begin{aligned} B_0 &= 40\left[\frac{1}{(1+0.04)^1}\right] + 40\left[\frac{1}{(1+0.04)^2}\right] \\ &\quad + \cdots + 40\left[\frac{1}{(1+0.04)^{20}}\right] + 1000\left[\frac{1}{(1+0.04)^{20}}\right] \\ &= 38.462 + 36.98 + \cdots + 18.256 + 474.64 \\ &= \$1000 \end{aligned}$$

图2-1显示了债券所有的现金流，包括到期偿还价值加上从将来到现在时刻所有的利息支付，它们形成了现在时刻的贴现值．假如例题中的债券2011年买入，在2021年

被赎回. 但是如果投资者希望通过和其他的替换品种比较其回报来评估这次投资的价值，此种比较要求使用不同于票面利率的一种利率来得到相同现金流的现值. 这种利率通常是可比投资中的现行汇率. 它被认为是必要收益率(i)，通常被称为**当日汇率**或者**到期收益率**(YTM).

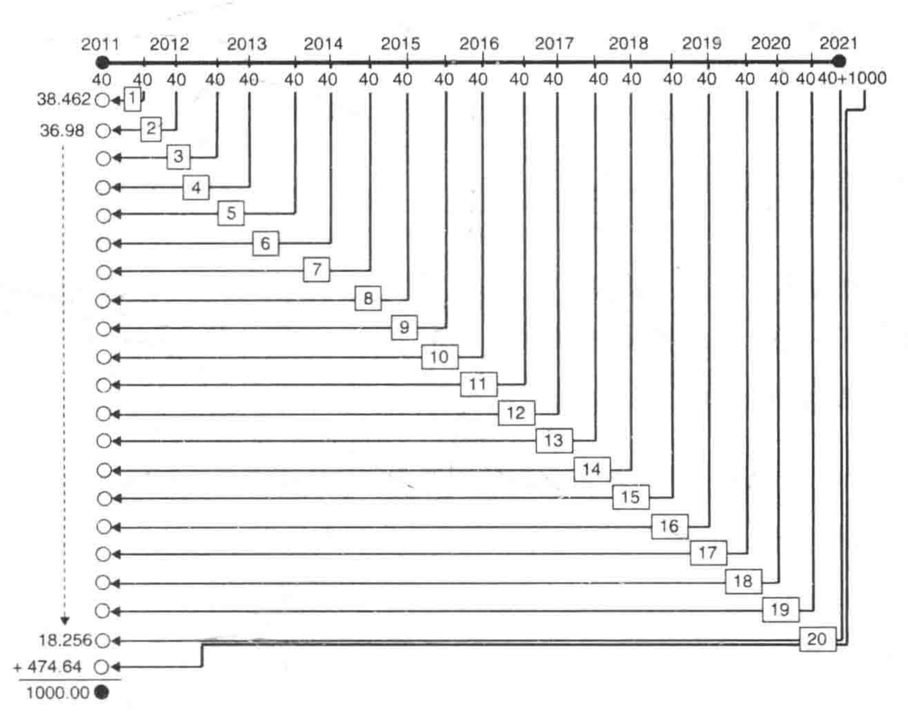


图　2-1

因此，我们假设在考虑把这种债券作为一项投资买入的时刻，相同种类有价证券的市场收益率为 10%，如果以 8%的票面利率购买此种债券，投资者将会放弃什么？在这个例子中，我们通过贴现前面 10%(半年计息一次的利率为 0.05)到期收益率的现金流，就能得到 8%票面利率的债券的价值.

$$
\begin{aligned}
B_0 &= 40\left[\frac{1}{(1+0.05)^1}\right]+40\left[\frac{1}{(1+0.05)^2}\right] \\
&\quad +\cdots+40\left[\frac{1}{(1+0.05)^{20}}\right]+1000\left[\frac{1}{(1+0.05)^{20}}\right] \\
&= 38.09+36.28+\cdots+15.07+376.90 \\
&= \$875.38
\end{aligned}
$$

注意到债券的价值变得小于之前当我们使用一个更高的预期收益率时债券的价值. 原因是我们贴现时颠倒了从将来到现在的方向. 正向赚钱越快，反向缩小也就越快.

我们可以使用下面的一般公式来获得具有必要收益率 i 的债券价值：

$$
\boxed{B_0 = I\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{(1+i)^t}\right]+M\frac{1}{(1+i)^n}}
$$

其中 B_0 是在必要收益率下的债券价值或者购买价格，I 是每半年计息一次的利息支付，i 是必要收益率，t 是任意半年期限，n 是在到期期限内半年的期数，M 是债券的赎回价值.

已知项 $\sum_{t=1}^{n} 1/(1+i)^t$ 是累积现值利息因子(PV/FA)，项 $1/(1+i)^n$ 是现值利息因子(PVIF)，二者是我们前期处理过的相同表值，我们能用下面的方式改写上述公式，这将允许我们使用表格的值，得到：

$$\boxed{B_0 = I(\mathrm{PV/FA}_{i,n}) + M(\mathrm{PVIF}_{i,n})}$$

并且，如同较早展示的一样，也可以使用 $a_{\overline{n}|i}$ 和 v^n 来表达公式：

$$\boxed{B_0 = I(a_{\overline{n}|i}) + M(v^n)}$$

半年计息的次数越多，手工计算就会越冗长，因此利用表格值来计算将变得简单.

例 2.1.1 一份 1000 美元的债券到期时间为 15 年. 其半年计息一次，年利率为 $9\frac{1}{2}\%$. 当必要收益率为 11%时，计算买入价格.

年利率为 $9\frac{1}{2}\%$，所以半年计息一次的利率为 $4\frac{3}{4}\%$或者 0.0475. $I=10\ 000\times0.0475=$ 47.50 美元. 赎回价值(M)是 1000 美元，年必要收益率是 11%，半年计息一次的必要收益率是 $5\frac{1}{2}\%$或 0.055.

$$\begin{aligned} B_0 = I(a_{\overline{n}|i}) + M(v^n) &= \$47.50(a_{\overline{30}|0.05}) + \$1000(v^n) \\ &= \$47.50\times14.534 + \$1000\times0.206 = \$890.96 \end{aligned}$$

例 2.1.2 如果一份面值为 2000 美元的债券，它的票面利率为 $12\frac{1}{4}\%$，如果它在 10 年末可以按面值赎回，那么投资者期望收益率为 10%时这只债券的现值为多少？

债券的年利率为 $12\frac{1}{4}\%$，因此半年计息一次的利率为 0.061 25. 利息支付为

$$\$2000\times0.061\ 25 = \$122.50$$

赎回价值(M)为 2000 美元，年必要收益率为 10%，半年计息一次的必要收益率为 5%.

$$\begin{aligned} B_0 = I(a_{\overline{n}|i}) + M(v^n) &= \$122.50(a_{\overline{20}|0.05}) + \$2000(v^n) \\ &= \$122.50\times12.462 + \$2000\times0.3769 = \$2280.40 \end{aligned}$$

2.2 折价和溢价

在例 2.1.1 和 2.1.2 中我们能看到当必要收益率高于债券票面利率时，债券价值或是买入价格比债券的面值要低；必要收益率低于债券票面利率时，债券价值或是买入价格要高于票面价格.

$$\text{如果}\quad i > r: B_0 \downarrow$$
$$\text{如果}\quad i < r: B_0 \uparrow$$

如果一份面值为 1000 美元的债券票面利率为 $9\frac{1}{2}\%$，以 890.96 美元的价格出售，收益率为 11%，那么就说它是折价出售，折价额为面值与买入价的差额：

$$\$1000 - \$890.96 = \$109.04 \quad 折价$$

相似地，如果一份面值为 2000 美元的债券票面利率为 $12\frac{1}{4}\%$，以 2280.40 美元的价格售出，收益率为 10%，那么就说它是溢价出售，溢价额为买入价与面值的差额：

$$\$2280.40 - \$2000 = \$280.40 \quad 溢价$$

因此，当买入价不同于债券的面值时，其中溢价或折价的差额被购买方（投资者）承担. 我们能看到这种方式下 109.04 美元的折价为：

$$\frac{\$1000 \times 0.095}{2} = \$47.50 \quad 半年计息一次的年利率为 9\frac{1}{2}\%$$

$$\frac{\$1000 \times 0.11}{2} = \$55.00 \quad 半年计息一次的年必要收益率为 11\%$$

$$\$55.00 - \$47.50 = \$7.50 \quad 每期利息的差额$$

如果我们在整个的到期期间（30 期）内都以 11% 的年必要收益率（半年计息一次的必要收益率为 5.5%）计算折价额，可以得到

$$\$7.50(a_{\overline{30|}\,0.055})$$

$$\$47.50 \times 14.534 = \$109.04 \quad 折价$$

这说明该贴现是在整个到期期限利息差额的现值，它必须从赎回价值（赎回金额）中减去形成债券现值或买入价格的价值为：

$$M - D_s = B_0$$

$$\$1000 - \$109.04 = \$890.96$$

同样地，以下我们能够看到 280.40 美元的溢价如下：

$$\frac{\$2000 \times 0.1225}{2} = \$122.50 \quad 半年计息一次的年利率为 12\frac{1}{4}\%$$

$$\frac{\$2000 \times 0.10}{2} = \$100.00 \quad 半年计息一次的年必要收益率为 10\%$$

$$\$122.50 - \$100 = \$22.50 \quad 每期利息的差额$$

以年必要收益率为 10% 或半年计息一次为 5% 来计算 20 期这个差额能贴现得到

$$\$22.50(a_{\overline{20|}\,0.05})$$

$$\$22.50 \times 12.462 = \$280.40 \quad 溢价$$

这也告诉我们溢价额实际上就是在 20 期内不同利率情况下得到的现值的差额，因此添加到完整的价值（赎回价值）就能得到债券的买入价格：

$$M + P_m = B_p$$

$$\$2000 + \$280.40 = \$2280.40$$

总之，我们可以写出折价额（D_s）、溢价额（P_m）的公式，作为债券面值和购买价格之间差额的现值：

$$D_s = (M_i - M_r)a_{\overline{n}|i}$$

$$\boxed{D_s = M(i-r)a_{\overline{n}|i}} \quad i > r$$

$$P_m = (M_r - M_i)a_{\overline{n}|i}$$

$$\boxed{P_m = M(r-i)a_{\overline{n}|i}} \quad i < r$$

最后，当必要收益率大于债券的票面利率时，债券会以低于面值的价格卖出，也就是债券的折价出售. 当必要收益率低于债券的票面利率时，它也可以以高于面值的价格出售，也就是债券的溢价出售.

例 2.2.1 一种面值 5000 美元的债券在 8 年内赎回，债券利率为 7.5%. 如果这种债券以收益率 6%购得，它是以溢价还是折价购得？购买价格是多少？

首先，让我们得到半年期利率：

$$\text{半年期债券利率} = 0.075/2 = 0.0375$$

$$\text{半年期收益率} = 0.06/2 = 0.03$$

因为必要收益率小于债券利率，债券将溢价出售.

$$\begin{aligned} P_m &= M(r-i)a_{\overline{n}|i} \\ &= \$5000(0.0375 - 0.03)a_{\overline{8}|0.03} \\ &= \$5000 \times 0.007 \times 7.019 \\ &= \$263.24 \quad \text{溢价} \\ B_p &= M + P_m \\ &= \$5000 + \$263.24 \\ &= \$5263.24 \end{aligned}$$

例 2.2.2 一种面值 2000 美元的债券，每年两次支付 10.5%的债券利率 20 年，在末期将以面值赎回. 如果投资者想得到 12%的收益率，债券将以溢价或折价出售？价格将是多少？

$$\text{半年期债券利率} = 0.105/2 = 0.0525$$

$$\text{半年期收益率} = 0.12/2 = 0.06$$

因为收益率高于债券利率，债券将被折价出售.

$$\begin{aligned} D_s &= M(i-r)a_{\overline{22}|0.06} \\ &= \$2000(0.06 - 0.0525 \times 11.4699 = \$172.05 \quad \text{折价} \\ B_d &= M - D_s = \$2000 - \$172.05 = \$1827.95 \end{aligned}$$

2.3 溢价分期

和之前提到的一样，溢价通过利息支付逐渐弥补，因此投资者在赎回时将不能收到溢价价格. 在最后的期限只收到原始赎回价值. 因此，在投资者账面记载的溢价价格将在每半年溢价部分收到时减少. 换句话说，当赎回日期来临的时候，溢价价格的账面价值不得不被分期，而且减少到等于原始赎回价值.

让我们考虑一种面额 3000 美元的债券，在 4 年内以 6%的利率赎回，提供 4.5%的购

买收益率．债券半年期利率为 0.03，半年期收益率为 0.0225.

$$P_m = M(r-i)a_{\overline{n}|i} = \$3000(0.03-0.0225)a_{\overline{8}|0.0225}$$
$$= \$3000 \times 0.0075 \times 7.2472 = \$163.06$$
$$B_p = \$3000 + \$163.06 = \$3163.06$$

在表 2-1 中分期偿还时间表明 3085.16 美元的溢价价格如何被逐渐减小到 4 年到期期限的第八个半年期末的赎回价值 3000 美元．

$$I = \$3000 \times 0.03 = \$90$$

表 2-1 溢价分期偿还表

(1) 半年期	(2)支付利息 [(par)(r)]	(3)收益 0.0225 [0.0225(5)]	(4)溢价分期 [(2)-(3)]	(5)债券的账面价值 [(5)-(4)]
				3163.06
1	90	71.17	18.83	3144.23
2	90	70.74	19.25	3124.97
3	90	70.31	19.69	3105.28
4	90	69.87	20.13	3085.15
5	90	69.42	20.58	3064.57
6	90	68.95	21.05	3043.52
7	90	68.48	21.52	3022.00
8	90	67.99	22.00	3000.00
	720	556.94	163.06	

为了构造分期偿还表，我们给出下面的步骤：

1. 第一项是作为首次账面价值的溢价价格 3163.06 美元.
2. 我们用收益率乘账面价值，就得到在(3)列中的首项.

$$\$3163.08 \times 0.0025 = \$71.17$$

3. 我们从第一项的利息(90 美元)中减去 71.17 美元，得到(4)列的首项：

$$\$90 - \$71.17 = \$18.83$$

4. 我们从前面账面价值中减去 18.83 美元的分期金额，就得到账面价值的第二项：

$$\$3163.06 - \$18.83 = \$3144.23$$

5. 我们用第 2 步中的必要收益率乘以这个新的账面价值，并且重复该序列直到得到下面的结果：
   (a) 最后的账面价值必须等于债券的面值：该情况为 3000 美元.
   (b) (4)列的总和必须等于溢价：该情况为 163.06 美元.
   (c) 累积收益率[(3)的总和]必须等于总利息和溢价的差额：该情况为

$$\$720 - \$163.06 = 556.94$$

2.4 累积贴现

和溢价价格的情形不同，贴现价格小于面值，但是在赎回的时候，投资者仍然收到面值．因此，贴现的总赤字将通过一点一点利息支付逐渐弥补．这就要求账面价值从贴现价

格逐渐增长，直到赎回日变得等于债券面值，这就是累积贴现的含义.

让我们考虑一种面值是 8000 美元、3 年内赎回、利率为 5%的债券，但是购买收益率是 8%.

$$半年期债券利率 = 0.05/2 = 0.025$$

$$半年期收益率 = 0.08/2 = 0.04$$

因为收益率大于债券利率，债券被折价购买.

$$D_s = M(I-r)a_{\overline{n}|i}$$

$$= \$8000(0.04-0.025)a_{\overline{6}|0.04}$$

$$= \$8000 \times 0.015 \times 5.2421$$

$$D_s = \$629.05 \quad 折价$$

$$B_d = \$8000 - \$629.05 = \$7370.95 \quad 购买价格$$

$$I = \$8000(0.025) = \$200 \quad 半年利率支付$$

我们完成下面的步骤来构造表 2-2：

1. 账面价值的首条记录是贴现价格 7370.95 美元的首项 .
2. 我们用收益率乘以账面价值得到(3)的首项.

$$\$7370.95 \times 0.04 = \$294.84$$

3. 我们从 294.84 美元中减去首项利息(200 美元)得到(4)列的首项.

$$\$294.84 - \$200 = \$94.84$$

4. 我们把 94.84 美元加到首项账面价值，得到第二个账面价值.

$$\$7370.95 + \$94.84 = \$7465.79$$

5. 和第 2 步一样，我们用收益率乘以这个新的账面价值，然后重复第 2 到 5 步直到所有的赤字被累积，最后完成账面价值 3000 美元面值，使其成为账面价值的最后记录.
6. 我们检查：

(a) (4)列总和等于贴现金额(629.05 美元).

(b) (3)列总和是贴现和总利息的和.

$$\$1829.05 = \$629.05 + \$1200$$

表 2-2　累积贴现表

(1) 半年期	(2)支付利息 [(par)(r)]	(3)收益 0.04 [0.04(5)]	(4)折价累积 [(3)−(2)]	(5)债券的账面价值 [(4)+(5)]
				7370.95
1	200	294.84	94.84	7465.79
2	200	298.63	98.63	7564.42
3	200	302.58	102.58	7666.99
4	200	306.68	106.68	7773.67
5	290	310.95	110.95	7884.62
6	200	315.38	115.38	8000.00
	1200	1829.05	629.05	

2.5 利息日之间债券购买价格

我们早期建立的债券价格(B_0)假设了投资者将在债券期限时间的利息支付日期之一买进. 但是，现实中这种情况可能发生，也可能不发生. 在购买发生在这些已经建立的息票日之间任意天的情形，我们需要知道多于两种债券价格期限：日期之间的购买价格(B_{bd})，有时称为**平面价格**；以及**报价价格**(B_q). 我们也需要区分债券利率和收益率之间的利息，这两者被包含在计算中.

$$\boxed{B_{bd} = B_0 + Y_{bp}}$$

所以，在日期之间债券的购买价格(B_{bd})是在购买日之前立即支付的那些日期计算的购买价格(B_0)，以及在购买价格(B_0)和它之前购买日和支付日之间的时间 bp 的利息部分(Y_{bp})的和. 基于收益率(i)计算该利息：

$$Y_{bp} = B_0(i)\text{bp}$$

报价价格(B_q)有时候也称为**净价格**，有

$$\boxed{B_q = B_{bd} - I_{ac}}$$

其中 I_{ac} 是面值(M)和购买日与支付日之前经历时间 bp 的利息，但是计算基于债券或息票利率(r). 这被称为**累积利息**，并且代表了属于出售者的利息部分.

$$I_{ac} = M(r)\text{bp}$$

例 2.5.1 一种债券面值 1000 美元、利率 8%、期限 10 年、2020 年 2 月到期(见图 E2-5-1). 其利息支付开始于 2010 年 8 月 15 日，每年 8 月 15 日和 2 月 15 日进行支付. 如果债券购买于 12 月 15 日，收益率为 11%，求购买价格和报价价格.

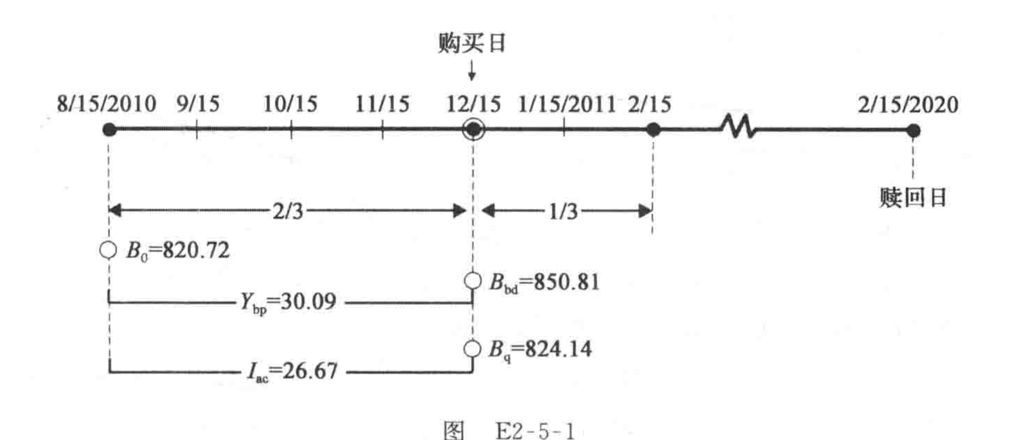


图 E2-5-1

半年期债券利率=0.08/2=0.04；收益率=0.11/2=0.055；n=20；M=$1000；$I$=$1000×0.04=$40.

$$B_0 = I(a_{\overline{n}|i}) + M(v^n) = 40(a_{\overline{n}|i}) + \$1000(v^n)$$

$$= \$40 \times 11.9504 + \$1000 \times 0.3427 = \$820.72 \quad \text{在利息日的购买价}$$

$$Y_{bp}=B_0(i)bp=\$820.72\times0.055\times\frac{1}{3}=\$30.09$$

$$B_{bd}=\$820.72+\$30.09=\$850.81$$

$$I_{ac}=M(r)bp=\$1000\times0.04\times\frac{1}{3}=\$26.67\quad 累积利息$$

$$B_q=B_{bp}-I_{ac}=\$850.81-\$26.67=\$824.14$$

例 2.5.2 一种面值 5000 美元的债券，利率为 5%，期限 6 年零 4 个月(见图 E2-5-2). 债券收益率 7%时平面价格是多少？求出累积利息的销售者分享额和债券净价格.

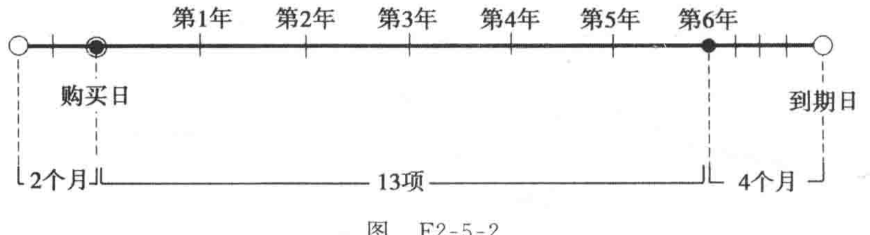


图　E2-5-2

平面价格是日期(B_{bd})之间的购买价格，销售者分享额是累积利息(I_{ac})，净价格是报价价格(B_q). 因为赎回日期是 6 年后的 4 个月，我们能够得出结论：利息日期优先于购买日期 2 个月. 我们能够推论出到期期限是 13，即为 6 年×2 期，4 个月记作第 13 期.

$M=\$5000$；$r=5\%$；半年期利率$=0.05/2=0.025$；$i=0.07$；半年期收益率$=0.07/2=0.035$；$n=13$ 期；$bp=2$ 个月$=1/3$ 期.

$$I=M(r)=\$5000\times0.025=\$125$$

$$B_0=I(a_{\overline{13}|0.035})+M(v^n)=\$125\times10.3027+\$5000\times0.6394$$

$$=\$4484.84\quad 支付日的购买价$$

$$Y_{bp}=B_0(i)bp=\$4484.84\times0.035\times\frac{1}{3}=\$52.32$$

$$B_{bd}=B_0+Y_{bp}=\$4484.84+\$52.32=\$4537.16\quad 日期之间购买价(平面价格)$$

$$I_{ac}=M(r)bp=\$5000\times0.025\times\frac{1}{3}=\$41.67\quad 累积利息或销售者分享额$$

$$B_q=B_{bd}-I_{ac}=\$4537.15-\$41.67=\$4495.49\quad 净价格或报价价格$$

注意到日期之间的价格(B_{bd})也能用所谓**实践方法**得到，这是以单利公式为基础的：

$$\boxed{B_{bd}=B_0[1+i(bp)]}$$

如同我们已经看到的，其中 bp 是购买之前的时间部分. 在我们的例子中，这将给出相同的结果：

$$B_{bd}=\$4484.84\left[1+0.035\times\frac{1}{3}\right]=\$4537.16$$

2.6　收益率估计

投资市场销售的债券通常都列出了它们的报价或净价. 和我们前面已经看到的一

样，投资者能够计算他们预期收益率下的债券未来价值，主要和报价价格加以比较. 如果他们计算的价值高于或者至少等于报价，他们将知道购买行为会带来等于或大于预期收益率的回报. 如果不知道收益率，比较的目的可能是渐进的. 3 种方法能用来计算渐进收益率.

平均方法

平均方法也称为**债券销售人方法**，用平均投资做年利息收入比较的基础. 所以收益率(YR)用年利息收入(AII)除以平均年投资(AAI)来得到.

$$\boxed{\mathrm{YR} = \frac{\mathrm{AII}}{\mathrm{AAI}}}$$

年利息收入是通过把年债券利率 r 应用在面值(M)上，在平均意义上对溢价和折价进行调节. 平均溢价$\frac{P_m}{n}$将减去，平均折价$\frac{D_s}{n}$将加上.

$$\mathrm{AII} = M(r) - \frac{P_m}{n}$$

或者

$$\mathrm{AII} = M(r) + \frac{D_s}{n}$$

平均年投资(AAI)是面值(M)和报价价格(B_q)之间的平均：

$$\mathrm{AAI} = \frac{M + B_q}{2}$$

例 2.6.1 如果面值 4000 美元、票面利率 5.5%的债券以报价 4350 美元被购买，14 年后赎回，收益率是多少？

$$P_m = B_q - M = \$4350 - \$4000 = \$350$$

$$\mathrm{AII} = M(r) - \frac{P_m}{n} = \$4000 \times 0.055 - \frac{\$350}{14} = \$195$$

$$\mathrm{AAI} = \frac{M + B_q}{2} = \frac{\$4000 + \$4530}{2} = 4175$$

$$\text{收益率(YR)} = \frac{\mathrm{AII}}{\mathrm{AAI}} = \frac{\$195}{\$4175} = 0.0467 = 4.67\%$$

值得注意的是，平均年投资能用实际投资额得到，实际投资额要么关联着溢价，要么关联着折价，在算术级数中它们通常的差异是平均溢价$\left(\frac{P_m}{n}\right)$或者平均折价$\left(\frac{D_s}{n}\right)$. 所以，为了说明这一点，我们能得到例 2.6.1 中以溢价 4350 美元开始的投资额，用 4350 美元去减平均溢价 350 美元/14＝25，降到了面值 4000 美元之下. 因此，投资的算术级数将是 4350 美元、4325 美元、4300 美元、4275 美元、4250 美元、4225 美元、4200 美元、4175 美元、4150 美元、4125 美元、4100 美元、4075 美元、4050 美元、4025 美元、4000 美元. 这些数额的实际平均就是它们的总额除以个数：

$$\frac{\$\,62\,625}{15}=\$\,4175$$

插值方法

根据数学插值法，能够通过联合和比较相关变量逼近收益率．我们从两个相近的收益率开始，使用它们计算相关购买价，然后建立一个差值表去解决未知的收益率．

例 2.6.2 让我们尝试在例 2.6.1 中用插值法逼近收益率．我们有一个溢价的 4350 美元的报价，立即表明收益率将低于债券利率 5.5%或半年 2.75%．如果看 PVIFA 表，我们将认出表中最接近的利率值是 2.5%和 2.25%．让我们使用这些比率来得到相关购买溢价：

$$P_m=M(r-i)a_{\overline{n}|i}$$

$$B_p=M+P_m$$

考虑 2.5%、$n=28$ 和 $M=4000$ 美元：

$$P_m=\$\,4000(0.0275-0.0225)a_{\overline{28}|0.0225}$$

$$=\$\,4000\times0.005\times20.6078=\$\,412.16$$

$$B_p=\$\,4000+\$\,412.16=\$\,4412.16$$

考虑 2.25%、$n=28$ 和 $M=4000$ 美元：

$$P_m=\$\,4000(0.0275-0.025)a_{\overline{28}|0.025}$$

$$=\$\,4000\times0.0025\times19.9648=\$\,199.65$$

$$B_p=\$\,4000+\$\,199.65=\$\,4199.65$$

现在，我们有三个价格(4412.16 美元，4350.00 美元，4199.65 美元)和两个比率(2.25%和 2.5%)，我们能通过建立插值表求解缺少的比率．

	收益率 (%)	购买价格 (%)	
2.25−2.25 / 2.25−x	2.25	4412.16	\$4412.16−\$4350.00
	x	4350.00	\$4412.16−\$4199.65
	2.5	4199.65	

$$\frac{2.25-x}{2.25-2.5}=\frac{\$\,4412.16-\$\,4350.06}{\$\,4412.16-\$\,4199.65}$$

$$\frac{2.25-x}{-0.25}=\frac{62.16}{212.51}$$

$$\$\,478.15-\$\,212.51x=-\$\,15.54$$

$$493.69=212.51x$$

$$\frac{493.69}{212.51}=x$$

$$\boxed{2.32 = x}$$

所以，渐进收益率为 2.32%. 事实上，如果用它得到购买价，而且用一个介于上述两种文本的表值，我们得到很接近于 4350 美元的价格. 借助一个复杂的计算机程序，精确的收益率能够立刻得到.

当前收益率方法

当前收益率方法基于计算利息率(Cr)近似收益率，用报价价格(B_q)除利息(I)得到利息率(Cr)，然后用(Cr)得到渐近收益率(YR)：

$$\boxed{\mathrm{YR} = \mathrm{Cr}(2 + \mathrm{Cr})}$$

其中 Cr 是

$$\mathrm{Cr} = \frac{I}{B_q}$$

注意在溢价的情形中，平均周期溢价 P_m/n 得从利息中减去.

$$\mathrm{Cr} = \frac{I - P_m/n}{B_q}$$

例 2.6.3 如果我们运用这种方法计算例 2.6.2，这里溢价价格为 4350 美元，债券面值为 4000 美元，债券利率为 5.5%，期限为 14 年，我们首先应该得到平均溢价：

$$P_m = \$350$$

$$\frac{P_m}{n} = \frac{\$350}{28} = \$12.50$$

这得从利息(I)中去掉：

$$I = \$4000 \times 0.055 = \$220$$

$$I - \frac{P_m}{n} = \$220 - \$12.50 = \$207.50$$

$$\mathrm{Cr} = \frac{I}{B_q} = \frac{\$207.50}{\$4350} = 0.048$$

$$\mathrm{YR} = \mathrm{Cr}(2 + \mathrm{Cr}) = 0.048(2 + 0.048) = 0.098 \quad \text{年利率}$$

且半年利率为 0.049.

2.7 久期

久期(duration)是现金流用其现值加权的投资的平均期限，是一种再投资率风险的度量，用于测量债券价格是如何随利率灵敏变化的. 它表示为

$$\boxed{D = \frac{I\sum_{t=1}^{n}\left[\frac{t}{(1+i)^t}\right] + \frac{nM}{(1+i)^n}}{I\sum_{t=1}^{n}\left[\frac{1}{(1+i)^t}\right] + \frac{M}{(1+i)^n}}}$$

其中 I 是债券的年利率，t 是支付期限，n 是赎回的年数，i 是收益率，M 是债券面值.

例 2.7.1　考虑面值为 1000 美元的债券，利率为 9%按年支付，5 年内赎回．给定市场收益率为 12%，计算这种债券的久期，并且解释其影响．

$t=1, 2, 3, 4, 5$；$n=5$；$i=0.12$；$M=1000$．如表 E2-7-1 所示．

$$I = M(r) = \$1000 \times 0.09 = \$90$$

$$D = \frac{I\sum_{t=1}^{n}\frac{t}{(1+i)^t} + \frac{nM}{(1+i)^n}}{I\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{(1+i)^t} + \frac{M}{(1+i)^n}} = \frac{\$90 \times 10 + (5 \times 1000)/(1+0.12)^5}{\$90 \times 3.61 + (1000)/(1+0.12)^5}$$

表　E2-7-1

支付期限 t	$\frac{t}{(1+i)^t}$	$\frac{1}{(1+i)^t}$
1	0.893	0.893
2	1.595	0.797
3	2.135	0.712
4	2.542	0.636
5	2.837	0.567
	10.00	3.61

$$D = \frac{\$3737.13}{\$892.33} = 4.19$$

久期是一个度量债券价格对收益率任意变化灵敏性的元素．

$$\boxed{\%\Delta B = \frac{\Delta i \cdot D}{1+i}}$$

让我们假设收益率从 12%增加到 12.1%，债券价格的百分数变化($\%\Delta B$)将是

$$\%\Delta B = \frac{0.1(\$4.19)}{1+0.12} = \$0.37$$

这就意味着当收益率变化 0.1 时，债券价格变化 0.37 美元．

项 $D/(1+i)$称为**波动率**(VL)，引导我们考虑最后的公式，并改写其为

$$\boxed{\%\Delta B = \Delta i \cdot \mathrm{VL}}$$

其中波动率被定义为评估一种现金流是多么迅速地对市场利率变化做出反应的度量．

第3章　共同基金

共同基金不是像股票或债券那样的特定有价证券．它们实际上是一种金融媒介，用于筹集满足各种商业和政府投资机会的投资资金．绝大多数普通投资者都是大量股票和债券以及其他金融工具的购买者．共同基金最显著的特征就是创造了专业化管理和监控的投资证券的多样化组合．每种基金都有它自己的特定投资目的，也有它自身反映个体目标和投资者特征的风险承受度．共同基金公司扮演着为其投资者提供高品质服务的唯一角色，具有如下特征：

- 通过制定规范的纪律实现投资工具在交易成本面前的多样化，来最小化非系统风险水平．
- 提供一种高水准实时水平的专业管理，能够实现高收益率，并能成功预见将来趋势和价格变动．

共同基金量身定做去适应各种投资者的需求、本性和特定的目标．它们形成了四种主要的类别：

1. 收益基金．主要的目的就是提供稳定的收入水平．它们主要聚焦于公司和政府债券．
2. 增长基金．主要的目的是资本增值．它们聚焦于公众持有公司的普通股股票，根据总额和风险水平而改变．
3. 平衡基金．这些基金提供收入和增值的平衡．它们既提供一个固定收入，也捕捉资本增值机会．它们对股票和债券二者进行投资，受具有现代风险耐受水平的投资者青睐．
4. 全球基金．基本是平衡基金，但是它们聚焦于海外投资机会．

3.1　基金估价

不像在整个商业日都可以交易的股票，共同基金的价值只由每个交易日末所决定，基于市场已经关闭后建立的被称为**净资产价值**(NAV)来定价．净资产价值是共享价格的共同基金等价物，通常代表基金实现连续和一致利益的管理能力．它也是市场价值的直接指示器．净资产价值与基金持有总价值(市场价值和现金)减去任意负债或债务(O)后是相一致的．除以未偿付的股份数，我们得到了每股净资产价值：

$$\boxed{\mathrm{NAV}=\frac{1}{S}[(\mathrm{MV}+C)-O]}$$

其中 NAV 是每股净资产价值，MV 是投资资产的市场价值，C 是手头持有的现金，S 是未偿付的股份数，O 是负债或债务．

例 3.1.1　Bright Future 共同基金公司在四种主要证券持有下面的股份：

证券 1：333 200 股

证券 2：298 513 股

证券 3：197 814 股

证券 4：88 500 股

公司也持有 244 000 美元现金，负债 153 000 美元，有总计 395 667 股未偿付股份. 在每种证券价格分别为 12 美元、16 美元、20 美元和 22 美元的这一天，计算基金的净资产价值.

首先，我们计算四种价格的证券的市场价值：

$$\begin{aligned}\mathrm{MV} &= (333\ 210\times 12)+(298\ 513\times 16)+(197\ 814\times 20)+(88\ 500\times 22)\\ &= 14\ 678\ 008\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{NAV} &= \frac{1}{S}[(\mathrm{MV}+C)-O]=\frac{1}{395\ 667}[(14\ 678\ 008+244\ 000)-153\ 000]\\ &= \$37.33\end{aligned}$$

3.2 负荷

负荷是强加在共同基金购买或出售上的佣金或交易费. 并非所有共同基金都收负荷. 事实上，它们是基于作为费用的含义而命名的. 一个**负荷基金**(需付佣金的基金)就是要求基金的投资者、买家和出售者支付这些费用，要么是每次交易都支付，要么是按照回报的百分比缴费，要么二者兼而有之. **前端负荷**就是费用在购买交易时征收，而**后端负荷**则是在出售交易时征收，也被称为**延期销售费**或者**或有佣金**. 负荷范围在投资额度的 1% 到 10%(至多)的价值. **非负荷基金**(免佣基金)不要求支付这些交易费，但是许多都包含了其他费用类型. 把这些费用加以分解，我们得到购买价格(PP)和出售价格(SP)，包括调节为前端负荷(L_F)和后端负荷(L_B)的净资产价值.

$$\boxed{\mathrm{PP}=\mathrm{NAV}\left(\frac{1}{1-L_F}\right)}$$

$$\boxed{\mathrm{SP}=\mathrm{NAV}(1-L_B)}$$

例 3.2.1 如果前端负荷是 6.5%，后端负荷是 5.25%，先前的净资产价值(例 3.1.1)对购买和出售价格是多少？

$$\mathrm{PP}=\mathrm{NAV}\left(\frac{1}{1-L_F}\right)=\$37.33\left(\frac{1}{1-0.065}\right)=\$39.93$$

$$\mathrm{SP}=\mathrm{NAV}(1-L_B)=\$37.33-(1-0.0525)=\$35.37$$

3.3 性能测量

费用比率(ER)

费用比率是比较两个或多个基金之间投资成本特别有用的性能度量. 它反映了基金相对于全年平均资产的运营费用. 因此，它用基金净资产的平均值除以总花费的费用来得到.

$$\boxed{\mathrm{ER}=\mathrm{Exp}\left[\frac{1}{(A_1+A_2)/2}\right]}$$

例 3.3.1 假设一家共同基金公司在年初显示总资产为 3 950 000 美元，年末为 3 873 150美元．假设基金的总运营费用达到 35 000 美元．费用比率是多少？

$$\text{ER} = \$35\,000\left[\frac{1}{(\$3\,950\,000 + \$3\,873\,150)/2}\right] = 0.009 \text{ 或 } 0.09\%$$

因为范围是 0.4 到 1.5%，0.09%的费用比率是合理的．当然，费用比率越高，从投资回报中拿掉的也就越多．

总投资费用(TIE)

总投资费用是费用比率的推广．当调节了持有期时，添加到负荷费用．

$$\boxed{\text{TIE} = \frac{1}{n}(L_f + L_B) + \text{ER}}$$

例 3.3.2 让我们假设一家共同基金的前端负荷是 4%，后端负荷是 3.5%，并且持有基金 3 年，总的投资费用将是

$$\text{TIE} = \frac{1}{3}(0.04 + 0.035) + 0.009 = 0.034 \text{ 或 } 3.4\%$$

报酬变异性比率(RVR)

报酬变异性比率(Reward-Variability Ratio)由 W. F. Sharpe 在 1966 年提出(Journal of Business, January, pp. 119-138)．它评估了共同基金可能面临的总风险中每个单元超过无风险回报的部分．它把基金回报和 91 天美国国债无风险回报做了比较，并且评估了回报率之间的差除以基金回报的标准差．

$$\boxed{\text{RVR} = \frac{1}{\sigma_j}(R_{jt} - R_{ft})}$$

其中 R_{jt} 是第 j 支基金在时刻 t 的回报，R_{ft} 是无风险资产的回报，通常无风险资产是国债，σ_j 是第 j 支基金回报的标准差．

例 3.3.3 假设在共同基金回报是 9%的时刻，无风险回报是 5%，相同时间回报的标准差是 18.53，报酬变异性比率将是

$$\text{RVR} = \frac{1}{0.1853}(0.09 - 0.05) = 21.6\%$$

这意味着基金提供了超出无风险利率 21.6%的回报．

注意如果需要计算基金回报率，我们将用下面的公式：

$$\boxed{R = \frac{S}{\text{IF}}(\Delta P + D + G)}$$

这里 R 是共同基金的回报率，S 是拥有的股份数，IF 是基金的投资额，ΔP 是基金价格的改变量，D 是收到的每股红利，G 是每股资本利得．

例 3.3.4 假设我们投资 2500 美元以 12.50 美元每股购买 200 股共同基金，1 年后基金价格增长到 13.70 美元，公司给出了 0.30 美元的每股红利，还获得了 0.45 美元的资

本利得. 回报率将为多少?

$$R=\frac{S}{\mathrm{IF}}(\Delta P+D+G)=\frac{200}{\$2500}[(13.70-12.50)+0.30+0.45]=15.65\%$$

而且，如果需要计算回报的标准差，我们将用标准差的正规统计公式来计算：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum(x_t-\bar{x})^2}{n-1}}$$

其中 x_t 是周期 t 的回报，$\bar{x}$ 是平均回报，n 是周期数目. 标准差常常用于估计围绕基金回报流的风险程度. 一个大的标准差通常表明高的风险水平.

例 3.3.5 假设我们追踪一家特定共同基金 7 年的回报，发现回报率如下：

5, 5.75, 6.5, 6, 7.33, 8, 9.5

我们首先通过找出均值 6.87 计算标准差，然后把需要的数据安排到表 E3-3-5 中 .

$$\sigma=\sqrt{\frac{14.06}{7-1}}=\sqrt{2.34}=1.53$$

这是一个相对小的标准差，表明了较低的风险水平. 类似地，当需要辅助分析的时候，比如在一个投资者投资组合中检验基金的多样性程度，我们能追随其他的统计测量规则. 我们看到这些基金相互联系在一起，通过采用诸如 Pearson 相关系数(r_p)来度量程度：

表 E3-3-5

t	x_t	$\bar{x}$	$x_t-\bar{x}$	$(x_t-\bar{x})^2$
1	5	6.78	−1.87	3.5
2	5.75	6.78	−1.12	1.25
3	6.5	6.78	−0.37	0.137
4	6	6.78	−0.87	0.757
5	7.34	6.78	0.47	0.221
6	8	6.78	1.13	1.28
7	9.5	6.78	2.63	6.92
			$\sum(x_t-\bar{x})^2$	14.06

$$r_p=\frac{1}{\sigma_i\sigma_j}\left[\frac{\sum(R_i-\bar{R}_i)(R_j-\bar{R}_j)}{n-1}\right]$$

其中 σ_i 和 σ_j 是基金 i 和基金 j 的标准差，R_i 和 R_j 是基金 i 和基金 j 的序列，$\bar{R}_i$ 和 $\bar{R}_j$ 是这些回报的均值，n 是回报周期或观察值的个数 .

例 3.3.6 假设我们想检验 Jim 的共同基金的投资组合的多样性，这里通过只看两种基金观察他们在过去 6 年的回报(表 E3-3-6).

$$\sigma_i=\sqrt{\frac{\sum(R_i-\bar{R}_i)^2}{n-1}}$$

$$=\sqrt{\frac{18.05}{6-1}}=1.9$$

$$= \sqrt{\frac{26.78}{6-1}} = 2.31$$

$$r_p = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j}\left[\frac{\sum(R_i - \bar{R}_i)(R_j - \bar{R}_j)}{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{1.9(2.31)}\left(\frac{-20.26}{6-1}\right) = -0.923 \text{ 或 } -92.3\%$$

表 E3-3-6

n	R_i	$\bar{R}_i$	$R_i-\bar{R}_i$	$(R_i-R_i)^2$	R_j	$\bar{R}_j$	$R_j-\bar{R}_j$	$(R_j-\bar{R}_j)^2$	$(R_i-\bar{R}_i)(R_j-\bar{R}_j)$
1	5	7.04	−2.04	4.16	12	8.29	3.71	13.76	−7.57
2	5.5	7.04	−1.54	2.37	9	8.29	0.71	0.50	−1.09
3	6.25	7.04	−0.79	0.624	8.25	8.29	−0.04	0.0016	0.032
4	7	7.04	−0.04	0.0016	8.5	8.29	0.21	0.044	−0.0084
5	8.5	7.04	1.46	2.13	7	8.29	−1.29	1.66	−1.88
6	10	7.04	2.96	8.76	5	8.29	−3.29	10.82	−9.74
				18.05				26.78	−20.26

这是很高的负相关，意味着在投资组合中基金是高度多样的．它们将朝着相互反向的方向运动，这恰好是多样性的目的．当一种基金表现不好的时候，其他基金表现很好，这就达到了一个很好的平衡．

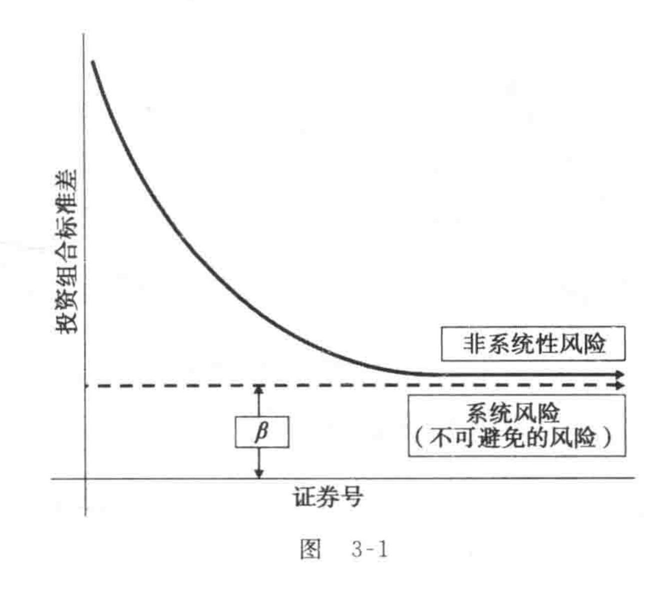


图 3-1

Treynor 指数

Treynor 指数以 J. L. Treynor 命名（Harvard Business Review，January-February 1965，pp. 63-75）．除了由共同基金产生的回报率和美国国债无风险利率之间的区别外，它类似于股份报酬变异性比率(RVR)．短期无息国库券被 β_j 除(而不是 σ_j)，其中 β 表示上

述基金可能面临系统风险的估计系数.

$$\boxed{\mathrm{TI}=\frac{1}{\beta_j}(R_{jt}-R_{ft})}$$

例 3.3.7 如果在计算前面回报率的时刻，市场系统风险(β)的系数估计是 1.07，那么 Treynor 指数将是

$$\mathrm{TI}=\frac{1}{1.07}(0.09-0.05)=3.7\%$$

这就是说该基金实现了 3.7%的回报率，超过了系统风险每个水平的无风险回报，那是预期的基金回报.

3.4 系统风险的影响

系统风险(β)也被称为**市场风险**或**不可分散风险**，指不可避免的风险，而且风险水平是自由市场内在的天性，和市场波动紧密相连. 在共同基金投资组合的背景下，这种类型的风险不能被消除，或者被通常的基金多样性补救所减少. 它跟持续威胁所有商业活动的广泛经济危机有关，它是比如股票趋同运动的理由. 它是一种投资者必须对付的必然性. 图 3-1 说明通过考虑非系统风险或特定唯一的有价证券暴露的风险水平，系统风险水平如何被独立决定.

用 β_i 来衡量一家特定基金的回报 R_i 的系统风险，它由 R_i 和市场回报 R_m 之间的协方差除以市场回报的方差而得到.

$$\beta_i=\frac{\mathrm{Cov}(R_i,R_m)}{\sigma_m^2}$$

记住对于无风险回报 R_f，因为和市场回报的协方差为零，所以 β 将为零. 对整体市场回报而言，因为市场回报和其自身的协方差就是方差本身，β 将等于 1.

$$\beta_m=\frac{\mathrm{Cov}(R_m,R_m)}{\sigma_m^2}=\frac{\sigma_m^2}{\sigma_m^2}=1$$

当组合包含许多个体基金时，β 就是基金组合回报的所有个体 β 的加权平均.

$$\beta_p=\sum_{j=1}^{k}\beta_j w_j \quad j=1,2,\cdots,k$$

其中 β_p 是投资组合的 β，β_j 是组合中个体 β，w_j 是组合中每个基金的权重，该权重是基金市场价值与整个组合市场价值的简单比值.

例 3.4.1 假设我们有一只五个基金的投资组合，其市场价值分别是 250 000 美元、370 000 美元、588 000 美元、610 000 美元和 833 000 美元，预估 β 分别为 0.8，0.75，1.2，1.35 和 0.97(见表 E3-4-1)，计算投资组合的 β_p.

首先，我们得到组合的市场价值 MV_p，然后计算基金权重(w_j)作为整个组合中单个基金的百分数：

$$\mathrm{MV}_p=\sum_{j=1}^{5}\mathrm{MV}_j$$

$$= \$250.000 + \$370\ 000 + \$588\ 000 + 610\ 000 + \$833\ 000 = \$2\ 651\ 000$$

表　E3-4-1

基金	MV_j	W_j	B_j	$B_j W_j$
1	250 000	0.094	0.8	0.075
2	370 000	0.139	0.75	0.104
3	588 000	0.222	1.2	0.2666
4	610 000	0.231	1.35	0.312
5	833 000	0.314	0.97	0.305
投资组合	2 651 000			$\beta_p = 1.06$

$$W_1 = \frac{MV_1}{MV_p} = \frac{\$370\ 000}{\$2\ 651\ 000} = 9.4\%$$

$$W_2 = \frac{MV_2}{MV_p} = \frac{\$250\ 000}{\$2\ 651\ 000} = 13.9\%$$

$$W_3 = \frac{MV_3}{MV_p} = \frac{\$588\ 000}{\$2\ 651\ 000} = 22.2\%$$

$$W_4 = \frac{MV_4}{MV_p} = \frac{\$610\ 000}{\$2\ 651\ 000} = 23.1\%$$

$$W_5 = \frac{MV_5}{MV_p} = \frac{\$833\ 000}{\$2\ 651\ 000} = 31.4\%$$

异常表现(α_{jt})

异常表现(α_{jt})度量在 M. Jensen(Journal of Finance, May 1968, pp. 389-416)之后也被称为 **Jensen 指数**，Jensen 通过计算比较以下两种收益率差异的(α)系数，用该指数检验了共同基金表现的异常：

- 在实施基金和像美国国债这种无风险资产的收益率之间的差异.
- 在市场回报(R_{mt})和无风险资产回报之间经过系统风险调节的差异.

$$\boxed{\alpha_{it} = (R_{jt} - R_{ft}) - [\beta_j(R_{mt} - R_{ft})]}$$

Jensen 解释说，正的 α 意味着风险调节后市场指数的变动，组合的异常表现处于基金能够处理自身费用的地方. 负的 α 说明基金不能预测将来证券的价格来充分支付花费. Jensen 测量了诸如研究费用、管理费和中间业务佣金等主要净花费.

例 3.4.2　如果我们对收益率保持前面使用的相同的日期，并且假设市场收益率是 10%，我们能计算 α 为

$$\alpha_{it} = (0.09 - 0.05) - [1.07(0.10 - 0.05)] = 1.35\%$$

3.5　定期定额

在共同基金信用中最简单和最广泛的技术之一，就是**定期定额**(dollar-cost averaging)，

即最小化花费来增加长期运营的回报. 过段时间将自动买入更多低价份额，几乎不买高价份额，这常常用于维持一个正常投资周期的自然平衡. 结果就是每股平均成本将总是低于平均价格. 在投资中有两种办法能达到正则化.

1. 不考虑每股成本，购买相同股数.

2. 不考虑每股成本，购买相同金额.

例 3.5.1 假设我们每月投资 250 美元购买特定基金的股份，接下来 6 个月股份价格变化为：7 月 14.25 美元；8 月 13.35 美元；9 月 12.20 美元；10 月 11.92 美元；11 月 13.10 美元；12 月 12.50 美元(表 E3-5-1). 计算平均费用，并和平均价格比较.

$$\text{平均费用} = \frac{\sum_{i=1}^{6} I_i}{\sum_{i=1}^{6} S_i} = \frac{1500}{116.82} = 12.84$$

$$\text{平均价格} = \frac{\sum p_i}{n} = \frac{77.32}{6} = 12.89$$

表　E3-5-1

月份 n	股份价格 P_i($)	投资额 I_i($)	股数 S_i
7 月	14.25	250	17.54
8 月	13.35	250	18.73
9 月	12.20	250	20.50
10 月	11.92	250	20.97
11 月	13.10	250	19.08
12 月	12.50	250	20.00
合计	77.32	1500	116.82

第4章 期　　权

作为一种投资形式，有组织的期权市场在过去四十年快速发展起来了．这起源于1973年芝加哥期权交易所开张，开启了标准期权合约交易的新纪元．从那时起，期权就成为了重要的投资手段，不但吸引了狂热的投资者，也介绍了自身的文化和语言，这些是我们需要探索的．**期权**是金融工具，其扮演一份标准合约的角色，并提供持有人机会和权利，但不提供以规定价格在通常为一年之内的较短期限之前购买或出售资产的义务．

期权有三种基本形式：权利、权证、看涨和看跌．我们聚焦于最普遍的看涨期权和看跌期权．**看涨期权**给了持有者在到期日之前用所谓执行价格购买特定股份数目的权利(通常是100股普通股)．执行价格通常为期权发行时股票的现行市场价格或与之接近．**看跌期权**除了销售权代替了购买权之外，类似于看涨期权．尽管对期权而言最普遍的标的资产是普通股，但是也可以以股票指数、外汇、债务工具和商品为基础．因为期权价值依赖于标的资产价值，这些标的资产就是为什么期权被称为衍生物的原因．这也是期权正当存在的原因．因为投资者预期标的资产的市场价格上升到足够高的位置，不仅能够覆盖期权的成本，而且还留下了盈利空间．

期权交易的周期始于一份由期权卖方发出的期权合约，该合约是由资产所有者向期权卖方支付期权费所创立，并且允许买卖权利在期权寿命期内执行．期权持有者能用标的资产的市场价格和包含的风险水平来监控其行为．一般地，期权持有者可能采取下列行为之一：

1. 执行期权：执行买入或出售一份期权的权利．当诸如普通股票这种标的资产市场价格高于期权执行价格时，看涨期权持有者将执行买权并赚钱．类似地，当市场价格低于看跌期权执行价格时，看跌期权持有者将执行卖权并获利．这就是被称为价内期权(in-the-money)的情形．

$$\text{价内期权：}\begin{cases} \mathrm{MP}_c > \mathrm{SP} \\ \mathrm{MP}_p < \mathrm{SP} \end{cases}$$

MP_c 是看涨期权的价格，MP_p 是看跌期权的价格，SP是执行价格．

2. 不执行期权：当投资者看不到任何盈利的机会时，选择不去执行期权．这时的情形是，标的资产的市场价格要么等于或低于看涨期权的执行价格，要么等于或高于看跌期权的价格．市场价和执行价格的这种不同情形就称为价外期权(out-of-the-money)；而两者价格相等时，就称为平价期权(at-the-money)．

价外期权：

$$\mathrm{MP}_c < \mathrm{SP}$$
$$\mathrm{MP}_p > \mathrm{SP}$$

平价期权：

$$\mathrm{MP}_c = \mathrm{SP}$$
$$\mathrm{MP}_p = \mathrm{SP}$$

3. 让期权到期：投资者保持等待标的资产价格以他们喜好的方式变化，以便能执行期权赚钱．有时候，直到期权时限结束，即执行期到来，这种变化也没有发生，投资者无法采取任何行动，期权被认为价值丧失．在这种情形下，投资者承受了损失．有可用的金融工具保护投资者防止这种损失和投资市场中其他类型的损失．一个很平常的策略——**套期保值**(hedging)，就是为了防止另外一种证券的风险而买入一种证券所采取的行动，比如一边买入一种证券而另一边卖出另外一种风险证券．期货投资中有三种普通策略：价差、套利以及两者组合．**价差**就是看涨和看跌相同标的资产同时购买和出售，比如伴随不同的执行价格、不同的期限或者二者兼具买入股票．能识别三种价差：

a. *水平价差*是具有买进和卖出相同执行价格但不同到期日的期权．

b. *垂直价差*包含具有买卖相同到期日但不同执行价的期权．

c. *蝶式价差*表示在不同执行价格购买的许多期权．

鞍式期权指在相同的执行价格同时购买相同到期日的相同数额的看涨看跌期权的组合．

4.1　用期权动态盈利

投资者可以通过买卖看涨看跌期权盈利，或者通过标的资产市场价格之间的差异盈利，以及在适当的时间之内执行这些期权的执行价格盈利．

买卖看涨期权

购买看涨期权的投资者有权利以执行价格购买 100 股标的资产(这里我们称股票)，这种执行价格持续到某个有效交割时间．这个投资者将观察该股票的市场价格波动，希望市场价格能上涨到他支付的交割价之上，以便他能在截止日期(期限的最后一天)之前出售期权，从两种价格之差中获取收益．这种盈利在短时期内是巨大而可得的，但是伴随着高风险．基本风险就是执行期结束投资者却没能卖出获利．在执行期限内很有可能这种股票的市场价格没有上涨，这些失去价值的看涨期权得不到补偿．有些投资者试图以明显的折扣在到期日之前出售期权，目的是至少能弥补他们投资损失的一部分．

出售一份看涨期权有两种常用方式：冒风险的方式和保守的方式．在被称为**无担保销售**(uncovered sale)的冒风险的方式中，出售者授予购买者不管股票市场价值多高，都以执行价交付 100 股股票的合约权利．假设一位出售者授予购买者以 30 美元的执行价交付 100 股股票的权利，并且假设到期日股票的市场价格上升到了 59 美元．出售者将承受 2900 美元的明显损失．看涨销售风险较小的类型是**担保销售**(covered sale)，包括了正在销售的股份，这个时候出售者已经拥有了这些股份，替代了不得不买入这些股份，甚至这个时候市场价值已经高出很多．最大可能性就是低价购买这些股份，以使得这种出售比无担保的看涨期权出售风险明显更小．

买卖看跌期权

在持有看跌期权合约的投资者中，看跌期权的买家等待股票的市场价格跌到执行价格

之下，以便她能用更便宜的价格买入获利. 但是，恰如看涨期权一样，如果截至到期日期标的资产股票的市场价格下跌并没有发生，那么看跌期权很容易损失其价值. 在出售看跌期权中，和出售看涨期权的情形一样，有无担保看跌期权和担保看跌期权. 出售者希望标的股票的市场价格上升到执行价格之上，以便到执行期权时他能以比购买看跌期权较高价的值出售他的期权而获利.

4.2 看涨和看跌期权的内在价值

对买家而言，看涨期权的内在价值就是通过标的股票的市场价格和执行价格之间的差价获利. 只有当标的股票的市场价格超过执行价格，买家选择执行期权，并且以市场价格售出，他就能获利. 可是，如果股票的市场价格下降，他将没有任何损失. 因为他有不执行期权、等待更好机会的选择. 对认购期权沽出者来说，内在价值就是他的损失，此时标的股票的市场价格上升，而他以低于当前标的股票的市场价格的执行价格发出期权.

对于买入看涨期权和沽出看涨期权的两种情形，价值由股票的市场价格超出执行价格多少来具体决定. 但是，对他们双方而言，价值是被反向决定的(即买家获取的利润是沽空者损失的). 对看涨买入者而言内在价值(IVC_B)以及认购期权沽出者而言内在价值(IVC_W)分别表示为

$$IVC_B = \max[(MP - SP), 0]$$
$$IVC_B = \min[(SP - MP), 0]$$

这里 MP 是股票的市场价格，SP 是看涨期权的执行价格.

例 4.2.1 假设某种股票的一份看涨期权以每股 25 美元的执行价格沽出，一段时间之后市场价格上升到 37 美元，买入和沽出的内在价值各是多少?

$$IVC_B = \max[(MP - SP), 0] = \max[(\$37 - \$25), 0] = \max[\$12, 0] = \$12$$
$$IVC_W = \min[(SP - MP), 0] = \min[(\$25 - \$37), 0] = \min[-\$12, 0] = -\$12$$

所以，对买入者而言，价值是 12 美元，而对沽空者来说，价值则是 −12 美元，这就意味着沽空者损失和买入者获利一样多. 因为期权沽空者必须遵守合约约束以 25 美元的执行价格递送，即使为了使买家可得期权她不得不以 37 美元的价格买进股票.

在图 E4-2-1 中，我们看到在 25 美元价格之前，每件事情都是平直的，但是这之后市场价格涨升到了 37 美元，增值的每美元提升了相同数额的潜在利益，这就是为什么斜率为 1 并且直线是 45 度的原因. 增加额是 12 美元，所得额也是 12 美元. 对期权沽出者恰好相反，对应曲线随着股票价格上涨反而下降，最终变成了买家的看涨曲线的镜面反射，总的损失也是 12 美元.

注意到在计算时，我们没有计算支付给认购期权沽出者的费用，即所谓**期权费**. 如图中所示，通过向下平移整个曲线到虚线位置，期权费减少了买家所得. 同时，期权沽出者收到期权费，通过向上平移曲线到点线位置，减少了期权沽出者的损失.

从看跌期权是看涨期权的反面的观点来看，我们可以看到：除了价格顺序的转换之外，看跌期权内在价值方程将和看涨期权价值方程是相同的. 因此，我们可以给买家记看跌期权内在价值(IVP_B)，给认沽期权沽出者记看跌期权内在价值(IVP_W)：

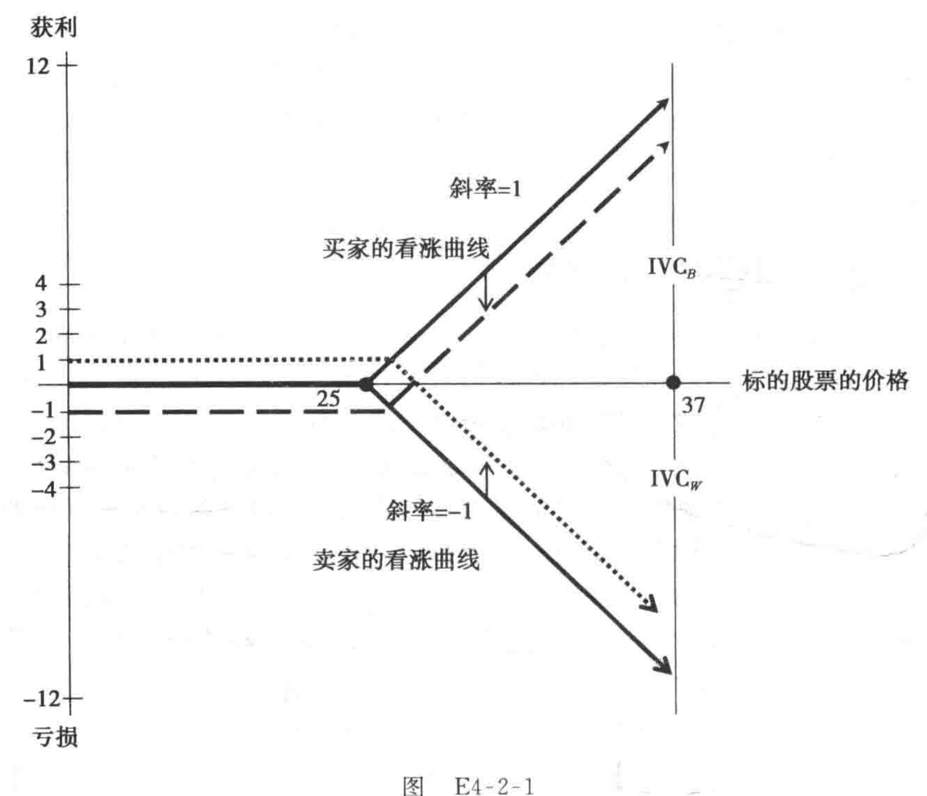


图 E4-2-1

$$IVP_B = \max[(SP - MP), 0]$$
$$IVP_W = \min[(MP - SP), 0]$$

在这种情形中，看跌期权的买家追求标的股票的市场价格下跌，以便他能通过更便宜价格买进以获取潜在利益. 另一方面，看跌期权的卖家因为以比市场出售价格还要高的价格执行期权，将产生损失. 而且，在这两种情形，买家得到的收益，卖家损失的额度，得和失二者都是股票市场价格下跌相同的美元数额.

例 4.2.2 一位投资者持有执行价格 70 美元的看跌期权，但是标的股票的市场价格下跌到了 65 美元(图 E4-2-2)，对买家和卖家看跌期权的内在价值是多少?

$IVP_B = \max[(SP - MP), 0] = \max[(\$70 - \$65), 0] = \max(\$5, 0) = 5$

$IVP_W = \min[(MP - SP), 0] = \min[(\$65 - \$70), 0] = \min(-\$5 - 0) = -\$5$

类似于看涨期权的情形，买家所得是每股 5 美元，卖家的损失以及双方盈利和损失都和股票市场价格下跌同等金额. 在认沽期权买家获利背后的理由是他支付 70 美元作为合约执行价格，尽管买家不得不承担了每股 5 美元的损失，但是卖家仍承诺以每股 65 美元投递.

如预期的一样，看跌期权的结果图形很类似于看涨期权的结果，但是图形却转变到了左边. 整个利润序列随股票市场价格增长不仅没有增长，反而下降，这证实了运动从右向左. 而且，实际买卖曲线对买家而言是向下移动的虚线，因为其反映了由支付期权费引起的减少. 点线表示实际卖家曲线，它向上移动反映收到期权费的所得.

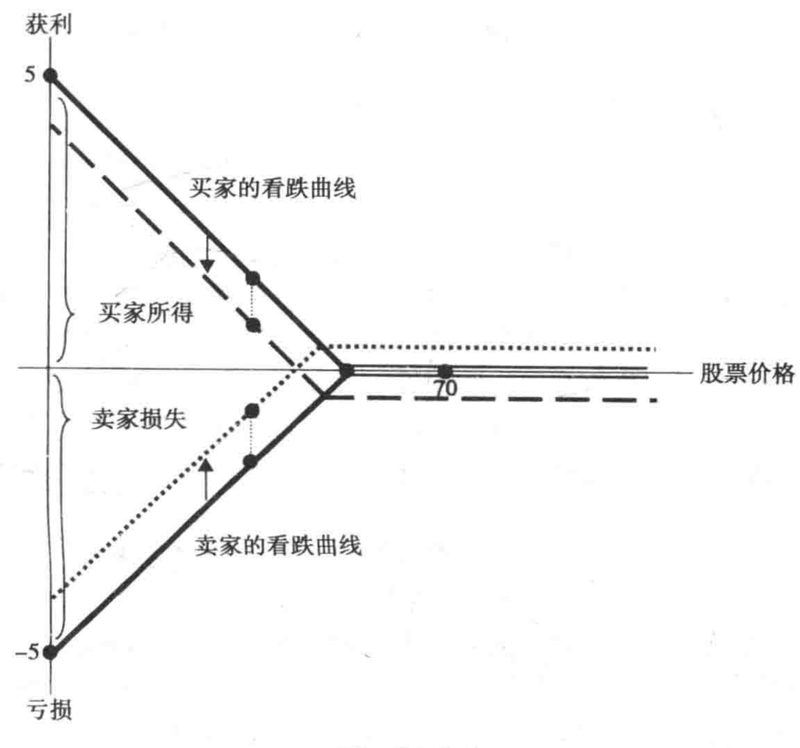


图　E4-2-2

4.3　看涨和看跌期权的时间价值

看涨期权时间价值(TV_c)或看跌期权时间价值(TV_p)，是期权价格(OP)和期权内在价值的差，其中看涨期权内在价值为 IVC，看跌期权为(IVP). 这个差值也定义为超过任何价内费用的部分.

$$TV_c = OP - IVC$$

及

$$TV_p = OP - IVP$$

例 4.3.1　一种看涨期权 100 股当前价值 600 美元，执行价格是 40 美元，如果股票的市场价格涨到了 45 美元，求看涨期权对买家的时间价值.

$$IVC_B = \max[(MP - SP), 0] = \max[(\$45 - \$40), 0] = \max[\$5, 0] = \$5$$

$$OP = \frac{\$600}{100} = \$6 \text{ 每股}$$

$$TV_c = OP - IVC = \$6 - \$5 = \$1.00$$

例 4.3.2　如果 100 股期权花费 500 美元，而且时间价值是 2 美元，该期权的内在价值是多少？

$$OP = \frac{\$500}{100} = \$5$$

$$IV = OP - TV = \$5 - \$2 = \$3$$

例 4.3.3 如果例 4.3.2 中的期权是看涨期权，其标的股票市场价格是 75 美元，买家已经同意的执行价格将是多少？

对买家来说看涨期权的内在价值最终等于股票的市场价格和看涨期权的执行价格之间的差额.

$$\mathrm{IVC}_B = \mathrm{MP} - \mathrm{SP}$$

$$\mathrm{SP} = \mathrm{MP} - \mathrm{IVC}_B = \$75 - \$3 = \$72$$

注意到，如果期权是平价期权或价外期权，时间价值将等于期权费或期权价格. 在平价期权的情形中，股票的市场价格和执行价格将相等，内在价值将为零. 时间价值为期权费减去零，这将终止在时间价值和期权费相等上. 在价外期权的情形，股票的市场价格和执行价格的差将是负的，导致考虑把零作为内在价值，预示该期权没有内在价值. 这里时间价值将是从期权费中去掉零的结果，这就意味着保持了期权费价值. 表 4-1 表明它是怎么工作的.

举一个例子，对于看涨期权 3 和 10、看跌期权 1 和 6(用箭头标示)，我们观察到时间价值等于期权费 OP＝TV(4；10；1；3)，仅仅因为内在价值为零. 而且，如果在看涨期权的情形，市场价格低于执行价格，或者在看跌期权的情形，市场价格高于执行价格(用星号标示)，我们可以观察到内在价值不存在. 因此，零被设计为这些情形的内在价值. 很自然地，当市场价格等于执行价格时(用 x 标示的情形)，内在价值将为零.

4.4　Delta 比率

Delta(对冲比率)(D)描述了标的股票市场价格变化(ΔMP)和期权价格变化或期权费变化(ΔOP)的关系. 这是一个告知投资者期权交易动态盈利和损失的指标. 从数学角度来看，它是两个价格变化量的比率

$$D = \frac{\Delta \mathrm{OP}}{\Delta \mathrm{MP}}$$

如果 Delta 等于 1，则意味着期权价格跟市场价格等同. 如果 Delta 大于 1，期权价格将比市场价格变化反应更快；如果它小于 1，期权价格变化将落后于市场价格变化. 表 4-1 显示看涨期权 1 和看跌期权 2、3 和 5 的情形都是期权价格和市场价格一起变化的情形. 看涨期权 4、5 和 8 以及看跌期权 9 和 10 是期权价格领先市场价格的情形，最后看涨期权 6、9、10 以及看跌期权 8 是期权价格落后于市场变化反应的情形.

表　4-1

期权		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
		MP	SP	IV[(1)－(2)]	OP	TV[(4)－(3)]	ΔOP	ΔMP	D[(6)÷(7)]
买权									
x	1	17	17	0	2	2			
	2	19	18	1	4	3	2	2	1
→	3	20	20	**0**	**4**	**4**	0	1	0
	4	22	20	2	7	5	3	2	1.5

（续）

期权		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
		MP	SP	IV[(1)−(2)]	OP	TV[(4)−(3)]	ΔOP	ΔMP	D[(6)÷(7)]
买权									
*	5	21	23	0	5	5	−2	−1	2
	6	23	22	1	6	5	1	2	0.5
*	7	24	25	0	6	6	0	1	0
	8	28	25	3	11	8	5	4	1.25
*	9	25	28	0	9	9	−2	−3	0.66
→	10	27	27	**0**	**10**	**10**	1	2	0.5
		(1)	(2)	(3)=(2)−(1)	(4)	(5)=(4)−(3)	(6)	(7)	(6)÷(7)
卖权									
→	1	17	15	**0**	**1**	**1**			
	2	19	20	1	3	2	2	2	1
x	3	20	20	0	4	4	1	1	1
*	4	22	20	0	4	4	0	2	0
	5	21	23	2	3	1	−1	−1	1
→	6	23	22	**0**	**3**	**3**	0	2	0
*	7	24	23	0	3	3	0	1	0
*	8	28	25	0	6	6	3	4	0.75
x	9	25	25	0	2	2	−4	−3	1.3
	10	27	29	2	5	3	3	2	1.5

4.5　期权价值的决定因素

五种主要因素决定了期权的市场价值，特别是决定了看涨期权的市场价值，因为看涨期权在交易市场更加普遍和流行．下面的方程用这些因素的函数描述了看涨期权的价值：

$$\mathrm{VC}=f[\mathrm{MP},\mathrm{SP},T,r_f,\sigma_{mp}^2]$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{VC}}{\partial\,\mathrm{MP}}>0\quad\frac{\partial\,\mathrm{VC}}{\partial\,T}>0\quad\frac{\partial\,\mathrm{VC}}{\partial\,r_f}>0\quad\frac{\partial\,\mathrm{VC}}{\partial\,\sigma_{\mathrm{mp}}^2}>0$$

但是

$$\frac{\partial\,\mathrm{VC}}{\partial\,\mathrm{SP}}<0$$

这里 MP 是标的股票市场价格，这将正向影响看涨期权价值．其他条件不变时，股票市场价格越高，看涨期权价值越大；SP 是看涨期权执行价格，这将反向影响期权价值．其他条件不变时，执行价格越低，看涨期权价值越大；T 是交割时间的长度，r_f 是无风险利率，$\sigma_{mp}{}^2$ 是标的股票市场价格的方差．所有后面这三个因素都以正向方式影响看涨期权的价值．

图 4-1 表示标的股票市场价格的两种假设分布．分布 2 有较高的方差，因此价格运动难以预测，并且价格运动比分布 1 更不稳定．假设两种分布都有相同的股票平均价格和相同的执行价格．因为看涨期权具有未定权益的特征(即只有当股票价格高于执行价格时，期权持有者才能获利)，相比于第一个分布所提供的有限概率，具有较大方差的第二个分

布将对超过执行价格的市场价格提供更高的概率.

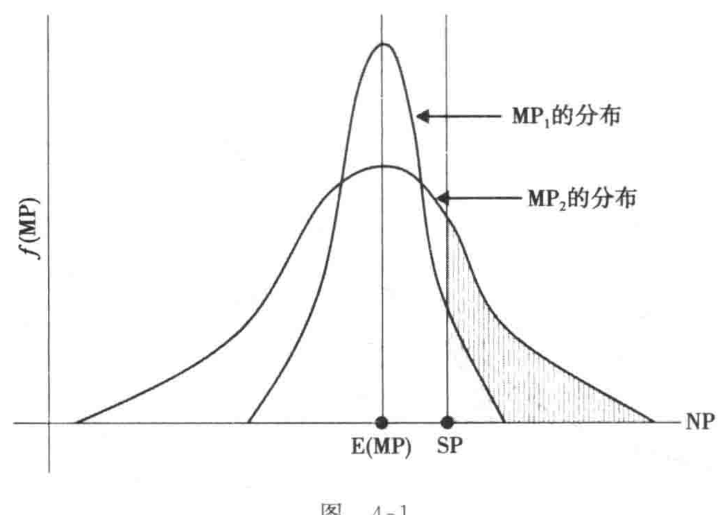


图 4-1

因此，我们能够得出结论，相同的决定因素也影响看跌期权的价值(VP)：

$$VP = f[MP, SP, T, r_f, \sigma_{mp}{}^2]$$

$$\frac{\partial VP}{\partial MP} < 0 \quad \frac{\partial VP}{\partial r_f} < 0 \quad \frac{\partial VP}{\partial SP} > 0 \quad \frac{\partial VP}{\partial T} > 0 \quad \frac{\partial VP}{\partial \sigma_{mp}^2} > 0$$

但是，因子的动态变化是不同的，股票的市场价格和无风险利率反向影响看跌期权的价值，可是执行价格、到期时间和市场价格的方差这些余下的因素却从正向影响看跌期权价值.

4.6 期权估价

1973 年 F. Black 和 M. Scholes 研究期权定价的文章(Journal of Political Economy，81，637-654)成为了期权估值计算的经典文献. 看涨期权价值(VC)由如下公式决定：

$$\boxed{VC = MP[N(d_1)] - (e)^{-rT} \cdot SP[N(d_2)]}$$

其中 MP 是标的股票的市场价格，SP 是看涨期权的执行价格，r 是无风险利率，T 是到期时间长度，$N(d)$是累积正态分布密度函数，VC 代表一个正态随机变量小于或等于 d 的概率，这里

$$\boxed{d_1 = \frac{\ln(MP/SP) + T(r + \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T}}}$$

和

$$\boxed{d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}}$$

式中 σ 是股票连续复合回报率每个周期的标准差. 可以用看涨期权的计算价值(VC)，执行价格的现值 CV(SP)和股票的市场价格来得到看跌期权的价值(VP)：

$$VP = [VC + CV(SP)] - MP$$

$$\boxed{VP = [VC + SP(e)^{rT}] - MP}$$

尽管这些公式可能听起来在应用方面乏味，并且要求得到两个表值 $N(d_1)$和 $N(d_2)$，Black-Scholes 公式对手工计算是简单的，然而计算机程序能处理分解第二项的许多更加复杂的值. 下面就是得到看涨和看跌期权价值的简化办法.

$$\boxed{VC = MP(PSP\text{ 值})}$$

其中看涨期权的价值是股票市场价格的某个百分数. 这个百分数由被称为**股份价格百分数**(PSP)的表值所确定. 看附录中表 9. PSP 根据两种计算值得到：

1. 垂直值：用标准差(σ)和期限平方根($\sqrt{T}$)的乘积计算.

$$\boxed{\sigma\sqrt{T}}$$

2. 水平值：用股票的市场价格除以执行价格的贴现值，该值使用了无风险利率和年度格式的实际到期时间进行贴现.

$$\boxed{\frac{MP}{CV(SP)} = \frac{MP}{SP/(1+r_f)^T}}$$

例 4.6.1 计算执行价格为 90 美元、到期期限为 9 个月的看涨期权价值. 给定当前股票价格是 108.50 美元，无风险利率是 5%，股票回报率的标准差是 0.75.

首先，我们得查阅附录表 9 中的 PSP 值，但是我们需要计算垂直值和水平值：

- 垂直值：$\sigma\sqrt{T} = 0.75\times\sqrt{\frac{9}{12}}$ 考虑 9 个月的到期期限为四分之三年.

$$\sigma\sqrt{T} = 0.65$$

- 水平值：

$$\frac{MP}{SP/(1+r_f)^T} = \frac{\$108.50}{\$90/(1+0.05)^{0.75}} = \$1.25$$

接着，我们在表 9 中看到对应 0.65 的垂直值和 1.25 美元的水平价值的值. 该值是 34.2，并且这是我们需要的 PSP 值(它是一个百分数格式).

$$VC = MP(PSP) = \$108.50(0.342) = \$37.11$$

例 4.6.2 和例 4.6.1 看涨期权相关联的看跌期权价值是多少?

$$VP = [VC + CV(SP)] - MP$$

回顾执行价格的现值是上面计算水平值的分母，即

$$CV(SP) = \frac{SP}{(1+r_f)^T} = \frac{\$90}{(1+0.05)^{0.75}} = \$86.77$$

$$VP = (\$37.11 + \$86.77) - \$108.50 = \$15.38$$

4.7 期权组合的内在价值

广为人知多样化资产和防范风险的策略之一就是套利. 套利被用于组合期权，通过利用诸如不同期限、执行价格和市场价格的多种要素创建可能性的组合. 本章最初的篇幅

中，我们已经简短描述期权混合的类型. 下面我们计算期权组合的内在价值，即两种组合形式：鞍式和蝶式价差.

例 4.7.1 当股票的市场价格为 68 美元时，计算由买入执行价格为 55 美元的看涨期权和买入相同执行价格的看跌期权组成的组合期权的内在价值. 计算当股票价格下跌到 50 美元时的价值.

组合内在价值 = 看涨期权内在价值 + 看跌期权内在价值 = $IVC_B + IVP_B$

1.

$$= \max[(MP - SP),0] + \max[(SP - MP),0]$$
$$= \max[(\$68 - \$55),0] + \max[(\$55 - \$68),0]$$
$$= \max(\$13,0) + \max(-\$13,0) = \$13$$

2.

$$= \max[(\$50 - \$55),0] + \max[(\$55 - \$50),0]$$
$$= \max(-\$5,0) + \max(\$5,0) = \$5$$

这个组合被称为鞍式，如图 E4-7-1 所示.

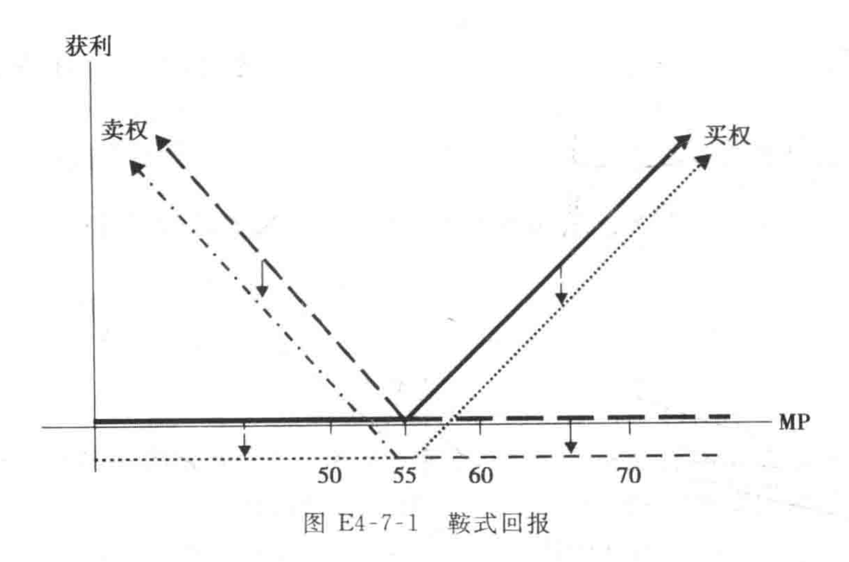


图 E4-7-1 鞍式回报

例 4.7.2 假设一家小的商业期权投资买入两种看涨期权，执行价格分别是 20 和 30 美元，卖出两种看跌期权，执行价格分别是 25 和 15 美元. 当股票价格是 40 美元以及下跌到 30 美元时，计算期权组合的内在价值.

当 MP= $40：

$IVC_B^1 = \max[(MP - SP),0] = \max[(\$40 - \$20),0] = \max(\$20,0) = \$20$

$IVC_B^2 = \max[(\$40 - \$30),0] = \max(\$10,0) = \$10$

$IVP_W^1 = \min[(MP - SP),0] = \min[(\$40 - \$25),0] = \min(\$15,0) = \$0$

$IVP_W^2 = \min[(\$40 - \$15),0] = \min(\$25,0) = \$0$

组合内在价值 = $\$20 + \$10 + \$0 + \$0 = \$30$

当 MP＝＄30：

$IVC_B^1 = \max[(MP - SP), 0] = \max[(\$30 - \$20), 0] = \max(\$10, 0) = \$10$

$IVC_B^2 = \max[(\$30 - \$30), 0] = \max(\$0, 0) = \$0$

$IVP_W^1 = \min[(MP - SP), 0] = \min[(\$30 - \$25), 0] = \min(\$5, 0) = \$0$

$IVP_W^2 = \min[(\$30 - \$15), 0] = \min(\$15, 0) = \$0$

组合价值＝＄10＋＄0＋＄0＋＄0＝＄10

这种具有不同执行价格的期权组合类型称为蝶式价差，如图 E4-7-2 所示.

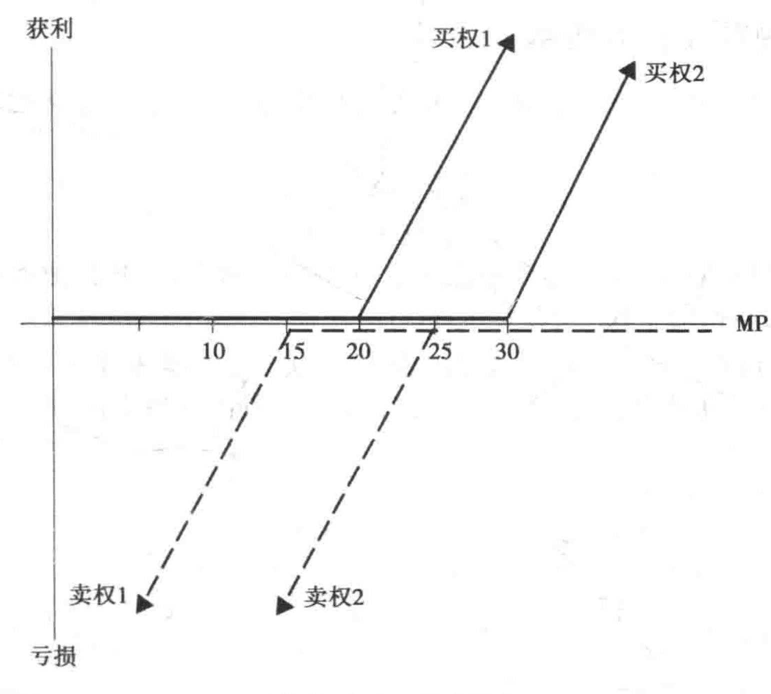


图 E4-7-2 蝶式价差

第5章　资本成本和比率分析

在金融决策背景下，特别是一家公司根据可接受的标准来决定一项投资能不能潜在增加公司股票价格时，**资本成本**是一个关键概念．它被定义为：

1. 公司必须获得维持其股票合适市场价值的投资回报率.
2. 投资者必须要求使资本对于回报投资机会具有吸引力的投资回报率.

5.1　资本的税前和税后成本

如果一家公司使用长期负债比如出售债券进行公司财务运营，债务的税前成本可以计算如下：

$$\boxed{\mathrm{CC}_b = \frac{I + [(M - \mathrm{NP})/n]}{(\mathrm{NP} + M)/2}}$$

其中 CC_b 是负债资本的成本，I 是年利息额，M 是债券面值，NP 是把面值调节到筹资成本的纯收入，n 是赎回的年数.

例 5.1.1　假设一家公司计划通过出售 1000 美元、票面利率 8.5%的债券筹集 500 万美元，给定公司每张债券折扣 30 美元出售，而且筹资成本每张债券 2%，计算 20 年资本的税前成本.

$$I = \$1000(0.085) = 85$$

$$B_d = M - D = \$1000 - \$30 = \$970$$

$$\mathrm{NP} = \$970 - (\$970 \times 0.02) = \$950.60$$

$$\mathrm{CC}_b = \frac{I + [(M - \mathrm{NP})/n]}{(\mathrm{NP} + N)/2} = \frac{85 + [(\$1000 - \$950.60)/20]}{(\$950.60 + \$1000)/2}$$

$$= \frac{87.47}{\$975.30} = 0.9 \quad \text{资本税前成本是 } 9\%$$

为了得到资本的税后成本 CC_a，我们使用

$$\mathrm{CC}_a = \mathrm{CC}_b(1 - T)$$

这里 T 是公司税率．假设公司税率是 39%，那么资本税后成本将是

$$\mathrm{CC}_a = 0.09(1 - 0.39) = 0.055 \text{ 或 } 5.5\%$$

5.2　资本加权平均成本

公司**资本结构**就是用于筹措公司运营费用的债务和股本的混合．长期资本来源的很多基本成本都已经在前面做过描述，比如股票和债券．剩下的事情是这些资本类型如何关联公司资本结构，而这是资本的全部加权平均所做的．它是一种确定公司资本结构的聚集方法，基于用市场价值或账面价值测量的比例对每个资本分量成本进行加权平均所得.

$$\boxed{\mathrm{CC}_{wa} = \sum_{i=1}^{n} w_i k_i}$$

其中 CC_{wa} 是加权平均资本成本，w_i 是公司资本结构中任意资本类型的比例，k_i 是任意资本类型的成本.

例 5.2.1 公司的资本结构和它们的个体成本的分量都阐述在下面和表 E5-2-1 中.

1. 长期债务占资本结构 38%和成本的 5.59%.
2. 优先股占 14%和成本的 9.62%.
3. 普通股占剩余 48%和成本 12.35%.

计算公司资本加权平均成本，并且解释它意味着什么.

表　E5-2-1

资本来源	所占资本结构比例 w_i	资本成本 k_i	w_ik_i
长期债务	0.38	0.0559	0.0212
优先股	0.14	0.0962	0.0135
普通股	0.48	0.1235	0.0593
	100.00		$\sum_{1}^{3} w_ik_i = 0.094$

$$CC_{wa} = \sum_{i=1}^{3} w_ik_i = 9.4\%$$

资本加权平均成本是 9.4%，意味着这个公司可以接受所有的投资项目，只要这个项目潜在收益回报大于或等于 9.4%.

5.3　比率分析

股权持有者、债权人和管理人都对公司的财务报表反映出的绩效很感兴趣. 未来的投资者和当前的股票持有者都希望知道更多关于公司的回报趋势和潜在风险的信息，从而更好地理解什么能影响股票的价格，以及公司盈利的股票分红. 管理者主要的兴趣在于控制和监控公司绩效的能力，并把它带到最高的可能水平. 所有这些都需要建立企业财务报表，通过构建和计算各种比率指标去评估公司绩效. 比率分析也考虑了两种观点：**截面**，这里财务指标的比较是在相同时间点的；**时间序列**，这里分析的指标趋向于在一个时期. 大多数财务比率与公司利用和管理资产相关，因此它们也都与投资相关. 考虑分析，大多数财务比率与短期运营分析相关，这是因为它们反映业绩的具体方面，比如盈利比率、流动比率以及经营比率. 在长期运营分析中，负债率将是一个典型的例子.

盈利能力比率

盈利能力比率也被称作**效率比率**，因为它的主要目的是评估高效企业是如何利用他们的资产，并且最终是如何做到吸引投资者投资的.

边际毛利率(GPMR)表明了对于每美元的净销售额 NS(即销售总额减去被退回产品总额)GN(即支付销货成本后的销售额)所产生的毛利.

$$\boxed{\text{GPMR} = \frac{\text{GP}}{\text{NS}}}$$

例 5.3.1　如果毛利是 83 420 美元，并且净销售是 185 377 美元，那么 GPMR 是

$$\text{GPMR}=\frac{\$\,83\,420}{\$\,185\,377}=0.45$$

45%的边际毛利率意味着每美元的净销售有 45 美分是毛利.

经营边际利润率(OPMR)和经营利润的关系并不同于毛利率和毛利的关系，因为经营利润还和净销售相关. 经营利润是经营收入的另一个术语，就像息税前利润一样.

$$\boxed{\text{OPMR}=\frac{\text{OY}}{\text{NS}}}$$

例 5.3.2　如果营业收入是 45 000 美元，且净销售额是 300 000 美元，那么经营边际利润率是

$$\text{OPMR}=\frac{\$\,45\,000}{\$\,300\,000}=0.15$$

这表示这个企业净销售额里每美元中的 19 美分是归入营业收入预算的.

边际纯利润率(NPMR)中，净利润是和净销售相关的. NPMR 说明了企业从销量中获取的净利润.

$$\boxed{\text{NPMR}=\frac{\text{NP}}{\text{NS}}}$$

例 5.3.3　假设一个公司的净利润是 35 287 美元，并且净销售额是 298 971 美元，那么边际纯利润率就是

$$\text{NPMR}=\frac{\$\,35\,287}{\$\,298\,971}=0.118\text{ 或 }11.8\%$$

这意味着在净销售额里的每美元中，公司会得到略小于 12 美分的份额作为净利润. 这个度量手段非常重要主要是因为它很直观地展现了所有息税后已支付费用的所得利润.

投资收益率(ROIR)也叫资产回报(ROA)，它和一家公司的总资产净利润有关.

$$\boxed{\text{ROIR}=\frac{\text{NP}}{\text{TA}}}$$

例 5.3.4　假设采用之前的净利润数据 35 287 美元，相对总资产 250 000 美元，那么投资收益率就是

$$\text{ROIR}=\frac{\$\,35\,287}{\$\,250\,000}=14\%$$

这说明总资产值中的每美元中会有 14 美分是净收益.

股本回报率(ROER)中，净利润和所有者权益(OE)的优先股和普通股都相关. 它告诉了股东一个关键信息：公司会把他们的多少钱变成净利润：

$$\boxed{\text{ROER}=\frac{\text{NP}}{\text{OE}}}$$

例 5.3.5　假设股东持有价值 79 500 美元的股份，那么使它产生 35 287 美元净利润的股本回报率是

$$\text{ROER} = \frac{\$\,32\,287}{\$\,79\,500} = 44\%$$

这个信息告诉股东，这个公司能够把他所投资的每美元中的 44 美分变成净利润.

销售资产比率(SAR)也是一种效率比. 它所表现的是一个公司的资源有效利用率，这也是衡量公司职能和它产生利润能力的重要方面. 它与销售和总资产相关.

$$\boxed{\text{SAR} = \frac{\text{S}}{\text{TA}}}$$

例 5.3.6　假设一家公司的销量达到了 46 890 美元，并且记录表明它的年初总资产价值是 60 522 美元，而年末资产总值是 50 177 美元. 那么公司的销售资产比率是用总销量除以资产的平均值，因为我们有年初和年末的两个数据.

$$\text{SAR} = \frac{\$\,46\,890}{(\$\,60\,522 + \$\,50\,177)/2} = 0.85$$

这个比值表明公司在很努力地利用它的资产来生产和出售它的产品.

销售与净营运资金比率(SNWCR)研究的是销量和净营运资金的关系，基本上就是公司短期净值或是当前资产和负债的不同. 当前的这个测量给出这个比率更多的含义.

$$\boxed{\text{SNWCR} = \frac{\text{S}}{\text{NWC}}}$$

例 5.3.7　假设运营资本是例 5.3.6 中的 3590 美元，那么它的销售与净营运资金比率是

$$\text{SNWCR} = \frac{\$\,46\,890}{\$\,3590} = 13.1$$

这个比率反映了销量是怎么影响公司当前净值的，也可以说是净营运资本的使用情况.

基于市场的比值

基于市场的比值反映的是当与相关市场关联时公司的表现，因此，当前投资者、潜在投资者和公司经理都非常关注这个比值的数据.

市盈率(P/E)是最重要也是使用最普遍的比率之一. 它关注的是公司的普通股每股市场价和它的每股收益的比值.

$$\boxed{\text{P/E} = \frac{\text{MPS}}{\text{EPS}}}$$

这个比值反映的是投资者对公司经济表现的信心，因此，市盈率越高，股市对它的股价也就越高.

例 5.3.8　如果一家公司的普通股每股市值是 65 美元，每股收益是 7.45 美元，那么它的市盈率是

$$\text{P/E} = \frac{\$\,65}{\$\,7.45} = 8.72$$

这意味着这个公司的普通股每股在股市的售价是它收益的将近 9 倍.

价格收益增长率(PEGR)采用市盈率并与公司的年期望增长率(EGR)相关，反映的是

这家公司每股的潜在价值.

$$\boxed{\text{PEGR} = \frac{\text{P/E}}{\text{EGR}}}$$

例 5.3.9　假设一家市盈率为 8.72 的公司期望 8%的年增长率，那么它的价格收益增长率就是

$$\text{PEGR} = \frac{8.72}{8} = 1.09$$

关于价格收益增长率(PEGR)的理论如下：

- 如果 PEGR=1～2，那么公司股价在正常的变化范围内.
- 如果 PEGR<1，那么公司股票被低估了.
- 如果 PEGR>2，那么公司股价被高估了.

每股收益(EPS)对于普通股股东来说更加重要，特别是因为它是用净收益减去优先股的股利再除以普通股股份数量.

$$\boxed{\text{EPS} = \frac{\text{NP} - D_p}{\text{普通股股份数量}}}$$

例 5.3.10　假设一家公司有 600 000 美元的净利润，公司支付给优先股股东 7%的股利并且从 40 000 股普通股收益中分配红利给其余的股东. 那么它的每股收益就是

$$\text{优先股股利 } D_p = \$6000\,000 \times 0.07 = \$42\,000$$

$$\text{EPS} = \frac{\$600\,000 - \$42\,000}{40\,000} = \$13.95$$

这个值表示投资者拥有的普通股每股收益为 13.95 美元.

股息收益率(DY)是通过普通股每股股利(DPS)除以股票市场价值(MPS)得到的：

$$\boxed{\text{DY} = \frac{\text{DPS}}{\text{MPS}}}$$

如果每股股利为 1.95 美元，股票价格为 35 美元，那么股息收益率为

$$\text{DY} = \frac{\$1.95}{\$35} = 5.6\%$$

这说明普通股民只得到他所持每股股票市值的 5.6%作为股利.

每股现金流(CFPS)和每股收益很像，只是它用的是现金流动而不是净利润. 一些金融分析家相信真正的经营现金流动是比净利润更加可靠的量度，因为它考虑到了很多应收账款. 由于和普通股数目是相关的，可用现金是衡量一家公司资金环境是否健康的重要指标.

$$\boxed{\text{CFPS} = \frac{\text{OCF}}{\text{普通股股份数量}}}$$

例 5.3.11　假设一家公司有 65 000 美元的可流动运营资金，并且它的普通股股份达到了 500 000 份流通股，那么它的每股现金流就是

$$\text{CFPS} = \frac{\$65\,000}{500\,000} = \$0.13$$

这意味着这家公司的每股现金流是 13 美分.

派息比率(PYOR)说明了每股收益中有多少能作为普通股股东的现金股利.

$$\boxed{\mathrm{PYOR} = \frac{D_c}{\mathrm{EPS}}}$$

例 5.3.12　假设一家公司价值 \$13.95 的每股收益中有 3.10 美元作为每股现金股利被支付，那么派息比率就是

$$\boxed{\mathrm{PYOR} = \frac{\$3.10}{\$13.95} = \$0.22}$$

这意味着每股收益里每美元中有 22 美分是作为股利被支付的.

每股账面价值(BVPS)表明了股东所持每股的权益或净值.

$$\boxed{\mathrm{BVPS} = \frac{\mathrm{NW}}{\text{普通股股份数量}}}$$

例 5.3.13　假设一家公司的总资产是 747 000 美元，并且总的负债是 517 000 美元，还有20 000份流通股，那么每股账面价值是多少?

$$\mathrm{NW} = A - L = \$747\,000 - \$517\,000 = \$230\,000$$

$$\mathrm{BVPS} = \frac{230\,000}{20\,500} = \$11.50$$

这意味着公司的净值中每股价值是 11.50 美元.

价格账面值比率(PBVR)表明了股票的市场价格和账面价格的关系.

$$\boxed{\mathrm{PBVR} = \frac{\mathrm{MPS}}{\mathrm{BVPS}}}$$

例 5.3.14　假设例 5.3.13 中公司的股票在市场的发行价为 20 美元，那么价格账面值比率就是

$$\mathrm{PBVR} = \frac{\$20}{\$11.50} = \$1.74$$

1.74 美元的价格账面值比率表示这家公司的价值比股东投资的高出 74%.

一般情况下，价格账面值比率(PBVR)的意义如下:

- 如果 PBVR>1，表示公司高效地利用了资金.
- 如果 PBVR<1，表示公司低效地利用了资金.
- 如果 PBVR=1，公司的资金利用率在边际上.

价格销售比率(P/S)说明了花费多少钱可以买到一家公司价值 1 美元的财政收入，用市值(MC)除以公司去年的收入(TR)来计算.

$$\mathrm{MC} = \mathrm{MPS} \times \text{普通股股份数量}$$

$$\boxed{\mathrm{P/S} = \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{TR}}}$$

例 5.3.15　假设我们用前面例题中的股票价格和股份数量：每股收益是 20 美元，股份数量是 20 000，如果公司年底的财政收入是 \$650 000，那么市值就是

$$MC = \$20 \times 20\,000 = \$400\,000$$

$$P/S = \frac{\$400\,000}{\$650\,000} = 0.62$$

62%的价格销量比率是好的：它描述的情况是投资者得到的比他投资的更多．一般情况下，市场分析员已经给出了这个比值的标准应该小于等于75%．

$$\boxed{P/S \leqslant 0.75}$$

并且投资者应该避免这个比值大于150%．

托宾Q比率是以经济学家James Tobin命名的．他在传统PBVR理论基础上给出了改进的比率，托宾认为公司的资产和负债都应该包括在这个比率的分子上，并且在重置成本中分母应该是公司资产的总值而不是公司的账面价值．在这种情况下，托宾Q比率会非常准确地反映公司在市场的定位．

$$\boxed{\text{Tobin's } Q = \frac{TA_{mv}}{TA_{rv}}}$$

分子是公司总资产的市场价值而分母是总资产的重置价值．

例 5.3.16　假设一家公司的总资产的市场价值是127 000 000美元，并且它的重置成本是150 000 000美元，那么Tobin的Q值就是

$$\text{Tobin's } Q = \frac{127}{150} = 84.6\%$$

托宾还提到了这个比率的经验法则：

- 如果比值>1，那么公司有潜力进行更多投资．
- 如果比值<1，那么公司不能再进行投资，且需要更多资金来运作．

营运比率

这种类型的比率也叫**活动比率**，他们研究的是公司能够将账面转化成现金或销售额的能力．这些账目包括库存、营收账款、应付账款、固定资产和总固定资产．

存货周转率(ITR)，和这个比率相关的是销货成本和存货价值．

$$\boxed{ITR = \frac{COGS}{INY}}$$

一般存货的计算是用年初存货除以年末存货的平均值．

例 5.3.17　假设销货成本是130 000美元，并且平均存货是53 560美元，那么存货周转率是

$$ITR = \frac{\$130\,000}{\$53\,560} = 2.43$$

2.43的存货周转率就意味着这家公司每年移动存货2.43次，存货周转率可以理解为**库存综合年限**(AAINY)．这也是衡量平均存货在库存中所停留的时间，是通过用365天除以存货周转率得到的．

$$\boxed{AAINY = \frac{365}{ITR}}$$

如果我们用 365 除以 2.43 就得到

$$\text{AAINY}=\frac{365}{2.43}=150$$

这个数据表明公司要用 150 天来处理存货.

应收账款周转率(ART)也叫**平均收款期**，说明的是顾客偿还他们信用账单的周期. 它用应收账款(AR)除以平均日销售额(DS)来表示：

$$\boxed{\text{ART}=\frac{\text{AR}}{\text{DS}}}$$

例 5.3.18　假设应收账款是 550 000 美元，并且年销售额是 3 650 000 美元，要得到应收账款周期，我们要先通过用年销售额除以 365 得到日销售额.

$$\frac{\$3\ 650\ 000}{365}=\$10\ 000$$

$$\text{ART}=\frac{\$550\ 000}{\$10\ 000}=55$$

这意味着需要 55 天左右去偿债，这并不是一个好现象，除非公司有以 60 天为周期的征收标准，但一般情况都是 30 天.

应付账款周转率(APT)也叫**平均付款期**，类似应收账款周转率，是用应付账款(APY)除以平均日购买额(DP)来表示.

$$\boxed{\text{APT}=\frac{\text{APY}}{\text{DP}}}$$

例 5.3.19　假设一家公司的应付账款是 480 000 美元，它的日购买是 15 517 美元，那么应付账款周转率是

$$\text{APT}=\frac{\$480\ 000}{\$15\ 517}=31\text{ 天}$$

这意味着这家公司要用 31 天去支付账款，这是一个很好的水平.

固定资产周转率(FAT)与销售量和公司固定资产相关.

$$\boxed{\text{FAT}=\frac{\text{NS}}{\text{FA}}}$$

例 5.3.20　假设一家公司有价值 79 365 美元的固定资产，并且它的净销售额估计为 133 773 美元，那么它的固定资产周转率是

$$\text{FAT}=\frac{\$133\ 773}{\$79\ 365}=1.7$$

这表示这家公司可以产生 1.7 倍固定资产的销售额.

总资产周转率(TAT)和固定资产周转率非常相似，只是这里净销售额是和公司总资产相关而不是固定资产.

$$\boxed{\text{TAT}=\frac{\text{NS}}{\text{TA}}}$$

例 5.3.21 假设在例 5.3.20 中的总资产是 140 593 美元，那么总资产周转率就是

$$\mathrm{TAT}=\frac{\$\,133\,773}{\$\,140\,593}=0.95$$

95%的总资产周转率意味着公司有能力将其 95%的资产转化为净销售额.

流动资金比率

流动资金比率展示了一家公司处理和支付其短期负债和义务的能力. 公司能染指的固定资产越多，公司的运营就会越简单，越顺利. 流动资金比率包括流动比率、速动比率、净营运资本比率和现金比率.

流动比率(CR)很可能是金融比率中最常用的一个. 它很简单地描述了流动资产和流动负债之间的关系.

$$\boxed{\mathrm{CR}=\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CL}}}$$

例 5.3.22 假设一家公司的流动资产价值 1 500 000 美元，它的流动负债估计是 980 711 美元. 那公司的流动比率就是

$$\mathrm{CR}=\frac{\$\,1\,500\,000}{\$\,980\,711}=\$\,1.53$$

1.53 的流动比率就意味着公司在流动资产中有 1 美元 53 美分来满足公司 1 美元的现时义务. 一般来说，金融分析家推荐流动比率为 2 或更大，这意味着如果让一家公司壮大，资产至少多于公司负债的两倍.

$$\boxed{\mathrm{CR}\geqslant 2}$$

在这里，这家公司需要从它们流动资产每美元中奉献 65 美分来支付它的当前债务人的索赔 (1/1.53)=0.65.

酸性测试比率(QR)也叫**速动比率**，和上面的流动比率很像，除了它的库存价值从流动资产中除去了.

$$\boxed{\mathrm{QR}=\frac{\mathrm{CA}-\mathrm{INY}}{\mathrm{CL}}}$$

例 5.3.23 假设例 5.3.22 中公司的整个库存估计是 380 664 美元，那么速动比率就是

$$\mathrm{QR}=\frac{\$\,1\,500\,000-\$\,380\,664}{\$\,980\,711}=1.14$$

这意味着公司对于债权人每美元的债权有 1 美元 14 美分. 值得一提的是如果这里有任何预付的项目，它们也会顺着库存价值从流动资产中被减去.

净营运资本比率(NWCR)中，净营运资本就是公司的短期净值. 这是流动资产和流动负债之间的区别. 如果我们用净营运资本除以现有总资产，得到的就是净营运资本比率，代表公司的潜在现金能力.

$$\boxed{\mathrm{NWCR}=\frac{\mathrm{NWC}}{\mathrm{TA}}}$$

例 5.3.24　假设在例 5.3.23 中公司的总资产是 49 950 592 美元，且流动资产和负债分别保持在 1 500 000 美元和 980 771 美元．那么这家公司的净运营资本就是

$$\text{NWCR} = \text{CA} - \text{CL} = \$1\,500\,000 - \$980\,711 = \$519\,289$$

它的净营运资本比率就是

$$\text{NWCR} = \frac{\$519\,289}{\$4\,950\,592} = 0.10$$

这意味着这家公司的总资产的每美元中有 10 美分的流动净值．

现金流动负债比率(CCLR)追踪了现金和在手的有价证券(C＋MS)，并衡量它们针对应有现实的义务和负债(CL)．

$$\boxed{\text{CCLR} = \frac{\text{C} + \text{MS}}{\text{CL}}}$$

例 5.3.25　如果我们把上一家公司的流动负债保持在 980 711 美元，并且假设现金账户有 27 500 美元，有价证券估计在 31 342 美元，现金流动负债比率就是

$$\text{CCLR} = \frac{\$27\,500 + \$31\,342}{\$980\,711} = 0.06$$

这表明公司以现金和有价证券的形式持有固定资产等价于 6 美分来满足它每美元的流动负债．

区间比(InR)是现金流动负债比率在时间方面的另一种表现形式．它揭示了一家公司多少天才能达到它的短期义务．它是通过现金、有价证券和应收账款(AR)的加和除以流动负债的日常开销或每日流动负债(CLPD)来得到的．

$$\boxed{\text{InR} = \frac{\text{C} + \text{MS} + \text{AR}}{\text{CLPD}}}$$

例 5.3.26　我们考虑在例 5.3.25 中的应收账款 18 500 美元，也考虑平均日常支出义务在 1250 美元．

$$\text{InR} = \frac{\$27\,500 + \$31\,342 + \$18\,500}{\$1250} = 62\ \text{天}$$

62 天的区间比意味着一家公司可以持续两个月来满足它 1250 美元的平均日常支出义务，挖掘它的现金，有价证券和应收账款的储备．

负债比率

负债比率也叫**杠杆比率**．因为增长的金融杠杆和风险更多地是随着一家公司金融中的负债而来的，负债比率就更加地重要了．这个比率暗示了一家公司多大程度上联系着债权人的债权和这家公司因此达到应付的定额支付来还清债务的能力．

资产负债率(D/A)，这是一个对公司总资产中属于债权人的百分比的直接的估计：换句话说就是，多少其他人的钱用来产生商业利益．它很简单地用总义务或负债除以总资产得到．

$$\boxed{\text{D/A} = \frac{\text{TD}}{\text{TA}}}$$

例 5.3.27 如果一家公司有 734 000 美元的总债务，并且它的总资产估计在 1 930 570 美元，它的资产负债率就是

$$\mathrm{D/A}=\frac{\$\,734\ 000}{\$\,1\ 930\ 570}=0.38$$

这表示公司 38%的资产和负债相关.

债务权益比率(D/E)衡量的是一家公司总债务和拥有者权益的比率. 它展现的是由债务所产生的所有者权益的百分比.

$$\boxed{\mathrm{D/E}=\frac{\mathrm{TD}}{E}}$$

例 5.3.28 如果例 5.3.27 中的公司有估计值为 1 200 000 美元的权益，那么它的债务权益比率是

$$\mathrm{D/E}=\frac{\$\,734\ 000}{\$\,1\ 200\ 000}=0.61$$

61%的债务权益比率意味着在公司所有者权益中每美元中的 61 美分是属于债权人的.

偿付能力充足率(Sol)是债务资产比率的对立面：它是通过用总资产除以总债务得到的. 说明了一家公司的总资产多大程度上能处理它的总负债或债务.

$$\boxed{\mathrm{Sol}=\frac{\mathrm{TA}}{\mathrm{TD}}}$$

例 5.3.29 我们保留在例 5.3.27 中的债务资产比率，来看看会得到哪种偿付能力充足率：

$$\mathrm{Sol}=\frac{\$\,1\ 930\ 570}{\$\,734\ 000}=2.6$$

这个偿付能力充足率就意味着公司的资产是负债的 2.6 倍，因此它是有清还债务能力的，偿付能力标准是：

- 如果比率>1：那么公司有清还债务能力.
- 如果比率<1：那么公司资不抵债.
- 如果比率=1：当公司的总债务等于总资产的时候，公司在边际上.

利息保障倍数(TIER)测量了公司能够支付利息的能力. 它是用营业收入(息税前)除以每年债权人的应付利息金额得到的.

$$\boxed{\mathrm{TIER}=\frac{\mathrm{OY}}{I}}$$

例 5.3.30 假设一家公司的营业收入是 170 000 美元，并且它的年支付利息是 35 000 美元，那么它的利息保障倍数就是

$$\mathrm{TIER}=\frac{\$\,170\ 000}{\$\,35\ 000}=4.9$$

这意味着这家公司有比应付利息将近大 5 倍的营业收入，我们也可以说公司支付给债权人的利息的每美元中，有将近 5 美元是以营业收入的形式. 还有，我们可以说公司拥有足够的支付能力去营运它的债务五年.

营业收入固定支付比例(OYFPR)是拓展的 TIER. 不同于分母只有支付利息，其他所有固定付款都被加到了支付利息中，例如支付本金(P)、支付优先股股利(D_{ps})和定期租赁付款(L).

$$\boxed{\text{OYFPR} = \frac{\text{OY}}{I + P + D_{ps} + L}}$$

例 5.3.31 把以下固定支付付款考虑加到例 5.3.30 中的支付利息中：支付本金，22 000美元；支付优先股股利，51 000；定期租赁付款，11 000 美元. 那么营业收入固定支付比例就是

$$\text{OYFPR} = \frac{\$170\,000}{\$35\,000 + \$22\,000 + \$51\,000 + \$11\,000} = 1.43$$

这家公司的运营收入仍然比应付固定付款多 1.43 倍.

注意，支付本金、支付优先股股利和租赁付款必须在税前的状态. 如果是税后的状态，它们就需要通过除以($I-T$)来转换为税前状态.

$$(P + D_{ps} + L)_b = \frac{(P + D_{ps} + L)_a}{(I - T)}$$

其中 T 是企业所得税税率.

5.4 杜邦模型

自 19 世纪 20 年代由杜邦公司财务管理师发明以来，杜邦模型(DuPONT Model)是一套财务管理者广泛使用的财务分析系统. 尽管它已经被一些分析师作为财务比率效用的完全系统，但是它能被描述为一个财务分析集合方法. 这个模型的基本前提就是组合公司的两份财务报表：

1. 收支表
2. 资产负债表

并且结合三个重要元素的影响：

- 销售利润，用净利润边际比率表示；
- 资产利用效率，用总资产周转比率表示；
- 杠杆影响，用权益乘数表示.

该模型有两个主要目的：

1. 分析是什么确定了投资者渴望从他们投资的公司中获得的回报大小. 这个目的通过把权益报酬(ROE)分解为两个组件而得到：投资报酬(ROI)和权益乘数(EM).

$$\boxed{\text{ROE} = \text{ROI} \cdot \text{EM}}$$

2. 把 ROE 元素分解为子元素：由净收益边际(NPM)乘以总资产周转(TAT)得到投资报酬：

$$\boxed{\text{ROI} = \text{NPM} \cdot \text{TAT}}$$

此外，净收益边际由净收益除以净销售得到，总资产周转由净销售除以总资产得到：

$$\mathrm{NPM}=\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{NS}} \quad \text{和} \quad \mathrm{TAT}=\frac{\mathrm{NS}}{\mathrm{TA}}$$

权益乘数(EM)是总资产与自有资产的比率：

$$\mathrm{EM}=\frac{\mathrm{TA}}{\mathrm{OE}}$$

把所有的因素带入，我们得到：

$$\mathrm{ROE}=\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{NS}}\cdot\frac{\mathrm{NS}}{\mathrm{TA}}\cdot\frac{\mathrm{TA}}{\mathrm{OE}}$$

消去 NS 和 TA，得到

$$\boxed{\mathrm{ROE}=\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{OE}}}$$

图 5-1 显示了各种元素是如何从资产负债表和收支表这两份财务报表中提取出来建立权益报酬的.

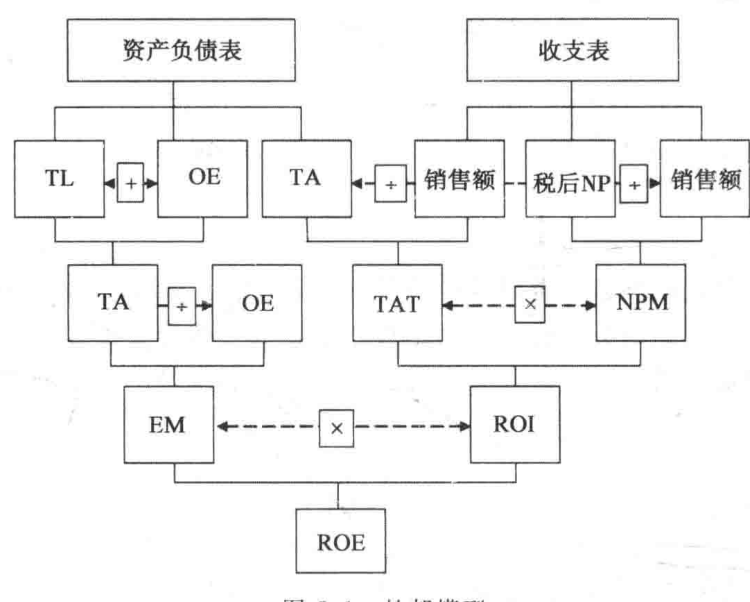


图 5-1　杜邦模型

5.5　比率后记

我们已经讨论了超过五种类型的比率，几乎覆盖了商业绩效的每一种可能层面. 这些比率不是用来死记硬背的，而是需要好好理解、使用和解释的. 它们是一个量除以另一个量的数学式子，因此必须这样理解才对. 简单解释必须聚焦于把分子视为分母的部分，或者把分母视为包含分子的整个部分：分数线上面的部分是如何联系分数线下面的部分的. 商业绩效有许多方面，因此分析许多比率比只分析一两个比率要明智得多. 在诸多因素中，比较必须要求时间周期一致，要求尺码和产品线一致. 用截面方法能做水平比较，去比较公司间的相同比率；用时间序列方法能做垂直比较，去比较相同公司在所有年份的比率. 数据来自于已经检查和证实的事实，并且应该来自于财务审计. 因为许多重叠的存在，为了特殊目的的比率财务分析需要仔细选择以免冗余.

单元六附录

小结

在这个单元，我们详细讨论了四种金融证券计算有关的事宜. 股票、债券、共同基金和期权都是基础的投资工具，额外的话题是资本成本和比率分析.

我们简要地讨论了股票的类型，用例子充分说明了买卖股票的过程. 聚焦了普通股的估值、新发行股票的成本，具有两段股息增长的股票价值，CAMP 模型的股票成本，以及其他的估值模型，例如 P/E 乘数方法和每股流动价值方法. 然后讨论优先股的成本和估值.

另一类重要的证券是债券. 讨论依据了相同的模式，从债券估值、费用和折扣价格开始，接下来说明了债券的溢价分期和累积贴现. 几个例子解释了在利息日购买债券将发生什么，用平均方法如何建立收益率，以及用插值和当前收益方法如何建立债券收益率. 最后讨论了债券的久期.

第三种主要证券是共同基金——一种具有自身特征的股票和债券组合，因此具有分开考虑的价值. 讨论了估值和负债，即购买和销售基金都收手续费. 也讨论了四种主要标准的实施度量：费用比率、总投资费用、报酬变异性比率和 Treynor 指数. 债券章节以系统风险关联结束，其中解释了 beta 和 alpha.

最后讨论的债券是期权. 我们以一名期权持有者的可能选择开始了讨论：他是否交割买或卖的权利，甚至选择跳过去并让时间运行到权利终止. 接下来的讨论用细节解释了通过买卖看涨和看跌期权动态盈利. 对于期权的价值，用例子和图表解释了看涨和看跌期权的内在价值. 而且，讲解了看涨和看跌期权的时间价值，以及期权价值的确定. 最后，一起讨论了期权的估值和组合的内在价值的计算.

这个单元最后的章节覆盖了资本成本和比率分析. 资本成本是投资领域和金融一般领域的中心问题，那是它为什么在这个单元有应得的空间，特别是资本成本意味着什么，首先作为税前或税后收益率，然后作为一个加权平均.

在比率分析部分，我们用解例题的方式，强调了它们直接的意思，以及它们怎么才能服务于金融绩效指数. 这个主题特别地且单元普遍地以杜邦模型结束，包含了许多金融分析的概念.

公式列表

股票

市场资本化率

$$\mathrm{MCR} = \mathrm{Er} = r = \frac{D + P_1 - P_0}{P_0}$$

现价

$$P_0 = \frac{D_1 + P_1}{1 + r}$$

下一年价格

$$P_1 = \frac{D_2 + P_2}{1+r}$$

累积现价

$$P_0 = D_1 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t}$$

当分红增长为常数比率时现值

$$P_0 = \frac{D_0(1+g)}{r-g}$$

当分红增长为常数比率时市场资本化率

$$r = \frac{D_1}{P_0} + g$$

两阶段股息增长：

$$P_0 = D_0\left[\frac{1-((1+g_1)/(1+r)^n)}{r-g_1}\right]$$

$$(1+g_1) + D_{n+1}\left(\frac{1}{r-g_2}\right)\left(\frac{1}{1+r}\right)^n$$

普通股成本—CAMP 模型

$$r_c = R_f + \beta(R_m - R_f)$$

用 P/E 乘数的普通股票价值

$$V_c = (\text{EPS}_e)(P/\text{E}_i)$$

优先股价值

$$P_p = \frac{D_p}{r_p}$$

优先股费用

$$r_p = \frac{D_p}{N_p}$$

债券

债券价值

$$B_0 = I\left[\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^t}\right] + M\left[\frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

$$B_0 = I(\text{PV/FA}_{i,n}) + M(\text{PVIF}_{i,n})$$

$$B_0 = I(a_{\overline{n}|i}) + M(v^n)$$

折价额

$$D_s = M(i-r)a_{\overline{n}|i}$$

溢价额

$$P_m = M(r-i)a_{\overline{n}|i}$$

平面价格

$$B_{\text{bd}} = B_0 + Y_{\text{bp}}$$

$$B_{\text{bd}} = B_0[1 + i(\text{bp})]$$

报价

$$B_q = B_{\text{bd}} - I_{\text{ac}}$$

收益率

$$\text{YR} = \frac{\text{AII}}{\text{AAI}}$$

$$\text{AII} = Mr - \frac{P_m}{n}$$

$$\text{AII} = Mr + \frac{D_s}{n}$$

$$\text{AAI} = \frac{M+B}{2}$$

当前收益

$$\text{YR} = \text{Cr}(2 + \text{Cr})$$

$$\text{Cr} = \frac{I - P_m/n}{B_q}$$

久期

$$D = \frac{I\sum_{t=1}^{n} \frac{t}{(1+i)^t} + \frac{nM}{(1+r)^n}}{I\sum_{t=1}^{n} \frac{t}{(1+i)^t} + \frac{nM}{(1+i)^n}}$$

债券价格百分比变化

$$\%\Delta B = \Delta i(\text{VL})$$

$$\%\Delta B = \Delta i\left(\frac{D}{1+i}\right)$$

共同基金

净资产价值

$$\text{NAV} = \frac{1}{\text{S}}[(\text{MV} + C) - O]$$

购买价格

$$\text{PP} = \text{NAV}\left(\frac{1}{1-L_F}\right)$$

出售价格

$$\text{SP} = \text{NAV}(1 - L_B)$$

费用比率

$$\text{ER} = \exp\left[\frac{1}{(A_1 + A_2)/2}\right]$$

总投资费用

$$TIE = \frac{1}{n}(L_F + L_B) + ER$$

报酬变异性比率

$$RVR = \frac{1}{\sigma_j}(R_{jt} - R_{ft})$$

回报率

$$R = \frac{S}{1F}(\Delta P + D + G)$$

Treynor 指数

$$TI = \frac{1}{\beta_j}(R_{jt} - R_{ft})$$

特定基金 beta

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_m)}{\sigma_m^2}$$

市场 beta

$$\beta_m = \frac{\sigma_m^2}{\sigma_m^2} = 1$$

累积 beta

$$\beta_p = \sum_{j=1}^{k} \beta_j w_j \quad j = 1,2,\cdots,k$$

期权

买家看涨期权内在价值：

$$IVC_B = \max[(MP - SP), 0]$$

卖家看跌期权内在价值

$$IVC_W = \min[(SP - MP), 0]$$

买家看跌期权内在价值

$$IVP_B = \max[(SP - MP), 0]$$

卖家看跌期权内在价值

$$IVP_w = \min[(MP - SP), 0]$$

看涨期权时间价值

$$TV_c = OP - IVC$$

看跌期权时间价值

$$TV_p = OP - IVP$$

Delta 比率

$$D = \frac{\Delta OP}{\Delta MP}$$

看涨价值

$$VC = MP[N(d_1)] - (e)^{-rt} \cdot SP[N(d_2)]$$

看跌价值

$$VP = [VC + SP(e)^{-rt}] - MP$$

$$d_1 = \frac{\ln(MP/SP) + T(r + \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

资本成本

债券的资本成本

$$CC_b = \frac{I + [(M - NP)/n]}{(NP + M)/2}$$

税后资本成本

$$CC_a = CC_b(1 - T)$$

资本加权平均成本

$$CC_{ua} = \sum_{i=1}^{n} w_i k_i$$

习题

1. 一男子投资本地商业股 500 股，每股出售价 15.75 美元，之后他以每股 17.25 美元出售所持股份的一半，计算他的投资回报率和资本利得.
2. 一投资者为她 3000 美元的投资支付了 65.006 75 美元，她计划购买练习 1 定价在 15.75 美元她所能购买的股份. 求净投资以及她能购买的股份数，计算投资收益.
3. 一位投资者以每股 33.50 美元购买了 130 股每股平均分红 1.95 美元的股票，假设他将以每股 35 美元销售 80 股，求平均回报率.
4. 一家公司正以每股 17.95 美元出售自己的股票，并且预期以 5%增长. 该公司通常把它每股收入的 50%作为分红. 如果每股分红是 2.15 美元，投资者愿意得到 9%的回报，

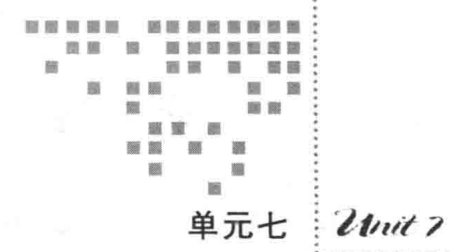
求股票的价值.

5. 一家公司决定把每股 25 美元的原始股份降低 10%的价格来发行新的证券，如果红利是 2.15 美元、发行成本是 0.50 美元，新股成本将是多少？（假设股票以 4.5%增长.）
6. 一位投资者考虑重仓投资一只股票，股息是每股 27 美元，接下来三年增长 18%，此后增长 12%. 如果投资者要求回报率至少为 15%，求这只股票的现价.
7. 如果纺织行业的市盈率是 7.5%，估计一家每股盈利是 4.15 美元的服装公司股份的价值.
8. 要求回报率是 10%，优先股股息是 6.50 美元，这种优先股的价值是多少？
9. 如果股票的价值跌到 50 美元，发行成本是 1.75 美元，求练习 8 中优先股的成本.
10. 一种面值 1000 美元的债券，期限为 20 年，利率 12%，要求回报率为 15%，其购买价格是多少？
11. 一位愿意获利 8%的投资者想以 10.5%的优惠利率投资期限 15 年的 1000 美元国债，求债券的现值.
12. 一种 2000 美元的债券，在 10 年内以 6.5%的优惠利率是可赎回的，如果你要求获利 8%，你将以什么费用和折扣价购买？
13. 如果另有一个只要求 5%收益的投资者，他将以什么费用或折扣价购买练习 12 中的债券？
14. 一种在 5 年内以 8%的利率可赎回的面值 2000 美元的债券，如果购买债券的收益率为 6%，构造分期偿还费用表.
15. 考虑一种具有 7%优惠利率但购买获利 8.5%的 3000 美元债券，构造 5 年到期期限的折扣累积表.
16. 一种具有半年优惠 8.5%的 5000 美元债券在 2015 年 11 月 1 日以面值赎回，求收益 7.5%在 2013 年 7 月 15 日的购买价.
17. 一份 4000 美元债券在 7.5 年以 6.5%可赎回，求(a)收益 8%的平面价格；(b)债券净价格；(c)应计利息的销售者股份.
18. 求购买询价 2250 美元、在 10 年可赎回的证券收益率. 面值为 2000 美元，优惠利率为 6.25%.
19. 当市场回报率是 11%，计算面值为 2000 美元、在 7 年内可以 8.25%的优惠利率赎回的债券的期限.
20. 求练习 19 的波动率因子(VL)，解释债券价格的含义.
21. 计算具有下面信息的共同基金的净资产价值：

有价证券	普通股股份数量	股价($)	债务($)	现金($)	已发行股票
A	337 000	10	538 000	444 500	500 000
B	250 000	15			
C	118 500	25.50			
D	120 095	31.95			
E	85 000	23			

22. 如果共同基金的净资产价值是 31.75 美元，前端载荷是 5%，后端载荷是 5.5%，求购买和销售价格.
23. 如果给定支付率为 0.075%，持有 5 年，求对练习 22 中基金的总投资费用.
24. 如果一家基金回报的标准差是 13.35，并且回报率是 6%，但在市场中无风险回报是 4.5%，求报酬变异性比率.
25. 假设市场 beta 是 2.05，求练习 22 中基金的 Treynor 指数，并解释它意味着什么.
26. 如果标的证券市场价格每股是 37.50 美元，从 3 个月前的 34.00 美元涨起来，求买卖双方看涨期权的内在价值.
27. 当股票的市场价格涨到 32 美元时，求交割价格是 28.50 美元的看跌期权对买家和卖家的内在价值.
28. 假设一只股票的市场价格上升到 37.00 美元，并且一位投资者有价值 550 美元的 100 股，看涨期权的交割价为 33.00 美元. 计算买家看涨期权的时间价值.
29. 如果一份期权的时间价值是 4.60 美元，100 股的成本是 360 美元，期权的内在价值将是多少?
30. 假设标的股票的市场价格从 40.00 美元上升到 45.00 美元，期权的价格从 8.00 美元上升到 10.00 美元. 求 Delta 比率，解释它意味着什么.
31. 如果具有 6 个月期限的看涨期权的交割价是 75.00 美元，具有回报标准差 2.34 的标的股票的市场价格是 88.00 美元，如果无风险利率为 6%，看涨期权的价值是多少?
32. 对一种财务运营，涉及以 10%的折扣、用 3%的发行成本出售债券，如果优惠券的面值是 2000 美元，优惠利率是 7%，并且有 15 年的可赎回期，资本的税前和税后成本是多少?
33. 计算一个具有下面资本、权重和个体资源的资本成本的公司的资本加权平均成本.

资本来源	权重	个体资源的资本成本($)
优先股	17	12.77
普通股	60	15.56
长期债务	23	10.57



单元七 Unit 7

回报和风险

第 1 章　回报和风险的测量

第 2 章　资本资产定价模型

第 1 章　回报和风险的测量

金融证券(如股票、债券以及其他投资性资产)可以提供一种投资，这种投资表现如何必须通过评估来确定. 这样进行估值的过程就提供了机会，使得决定证券股份价格最重要的两大因素——风险和回报(也称收益)得以相互关联，并且使得对风险和回报的评估变成所有金融决策的核心. 从风险本源的意思来看，**风险**指由没有预期到的事件发生所引发的机会. 从金融的意义上看，风险被定义为招致财务损失的机会. 当一项资产或一个投资机会被称为"风险"时，那么它将被认为存在着带来金融损失的巨大机会. 这就隐含了资产回报具有的可变性. 相反地，具有确定性的收益回报，像保障了收益回报的政府债券，则被认为是无风险的情形. 我们可以更进一步来讲，投资风险指的是已投资资产有低回报或负回报的概率，使一项资产所带来的低回报或负回报的概率越高，这项投资面临的风险也将越大.

一项投资资产的回报由价值的变化来定义，也由任意现金分配的变化来定义，全部表示为原始资产价值的百分数. 例如，以 15 美元/股的价格买入 100 股股票，然后以 17 美元/股的价格抛出，价值的变化就是 200 美元(1700 美元—1500 美元)，假设持有期间(购买和销售之间的时期)还收到 75 美元的股息，那么价值变化的 200 美元和现金股息 75 美元，这二者都要除以投资的原始价值(1500 美元)，就得到了 18.3%的投资回报：

$$\text{回报} = \frac{\$275}{\$1500} = 18.3\%$$

1.1　预期回报率

预期回报率(或收益率)(k_e)是产品的个体回报(k_i)与它们的概率(Pr_i)的乘积之和. 因此，这是一种回报的加权平均.

$$k_e = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \mathrm{Pr}_i$$

$$k_e = k_1 \cdot \mathrm{Pr}_1 + k_2 + \mathrm{Pr}_2 + \cdots + k_n \cdot \mathrm{Pr}_n$$

如果资产 X 有三种可能的回报：以概率 45%回报 9%，以概率 30%回报 10%，以概率 25%回报 11%(见表 1-1)，计算资产 X 的平均回报：

表　1-1

资产 X	k_i	Pr_i	$k_i \cdot \mathrm{Pr}_i$
k_1	0.09	0.45	0.0405
k_2	0.10	0.30	0.03
k_3	0.11	0.25	0.0275
			$\sum k_i \mathrm{Pr}_i = 0.098$

$$k_e = k_1 \cdot \mathrm{Pr}_1 + k_2 \cdot \mathrm{Pr}_2 + k_3 \cdot \mathrm{Pr}_3 = 0.0405 + 0.03 + 0.0275 = 0.098 \text{ 或 } 9.8\%$$

1.2 风险度量

度量资产风险简单而又直接的首要办法就是回报的幅度或称为**离差**，即最高回报和最低回报之间的差．如果选取上述资产 X，其有 9%、10%和 11%三种可能回报，如果把它和具有 5%、10%和 15%三种可能回报的资产 Y 相比较，我们能计算出两种资产回报的离差，资产 X 离差＝2(11－9)，资产 Y 离差＝10(15－5)(见表 1-2)，因为资产 Y 回报的离差比较大，我们可以说资产 Y 比资产 X 风险大．离差反映了代表风险的变异性，我们能得出结论：一种资产回报的离差越大，变异性就越大，风险也就越高．

建立在变异性概念之上，风险的第二种度量是回报的概率分布．概率分布越紧致，实际回报接近平均值的可能性就越大，因此就有较低的风险．反之，概率分布越宽泛，变异性就越高，因此风险也就越高．

表 1-2

k_i	X(%)	Y(%)
k_1	9	5
k_2	10	10
k_3	11	15
离差	11－9＝2	15－5＝10

标准差(σ)

标准差(σ)可用于度量围绕平均回报波动的离差，也就是说标准差越高，离差越宽，风险就越大．让我们设定一些概率，例如 25%、50%和 25%，作为资产 X 和 Y 回报的最终设定(见表 1-3 和图 1-1)，并且计算标准差．

$$\text{标准差 } \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (k_i - k_e)^2 \mathrm{Pr}_i}$$

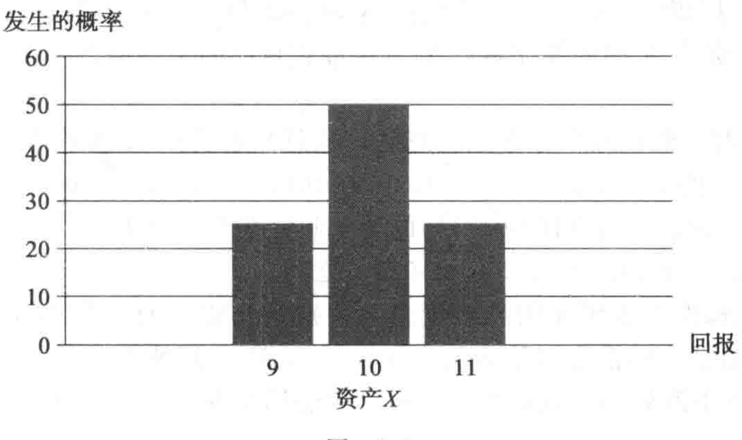


图　1-1a

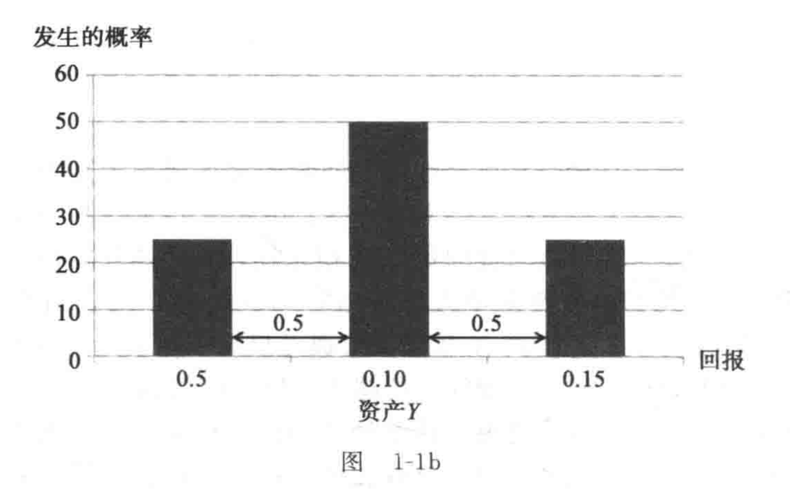


图 1-1b

表 1-3

	k_i	k_e	k_i-k_e	$(k_i-k_e)^2$	Pr_i	$(k_i-k_e)^2\cdot Pr_i$
资产 X						
k_1	0.09	0.098	−0.008	0.000 064	0.25	0.000 016
k_2	0.10	0.098	0.002	0.000 004	0.50	0.000 002
k_3	0.11	0.098	0.012	0.000 144	0.25	0.000 036
				$\sum_{i=1}^{3}(k_i-k_e)^2\cdot Pr_i$		0.000 054
资产 Y						
k_1	0.05	0.01	−0.05	0.0025	0.25	0.000 625
k_2	0.10	0.01	0	0	0.50	0
k_3	0.15	0.10	0.05	0.0025	0.25	0.00 625
				$\sum_{i=1}^{3}(k_i-k_e)^2\cdot Pr_i$		0.001 25

$$\sigma_x=\sqrt{0.000\,054}=0.0073$$

$$\sigma_y=\sqrt{0.001\,25}=0.0353$$

所以，资产 Y 回报的标准差(σ_y)比资产 X 回报的标准差大，从而资产 Y 比资产 X 风险大. 换句话说，资产 X 的回报比资产 Y 更接近它自己的平均值. 图 1-1 和 1-2 形象地展示了这个事实.

进一步，如果我们假设概率分布是正态的，这意味着资产 X 的平均回报(9.8%)事实上将在占总体 68.26%的±1 个标准差之间，即在 9.07%(0.098−0.0073)和 10.53(0.098+0.0073)之间. 该回报也在占总体 99.74%的±3 个标准差 0.0219(3×0.0073) 之间，即在 7.61(0.098−0.0219)和 11.99(0.098+0.0219)之间.

还有另一个比标准差更可靠的风险度量，特别是当资产回报不相等的时候(如上述例子中资产 X 和 Y 的平均回报分别是 9.8%和 10%)，这个额外的度量方式被称为**变异系数**($Coef_v$)，它考虑期望值周围数据的相对离差. 它能用标准差除以预期回报(k_e)而得到：

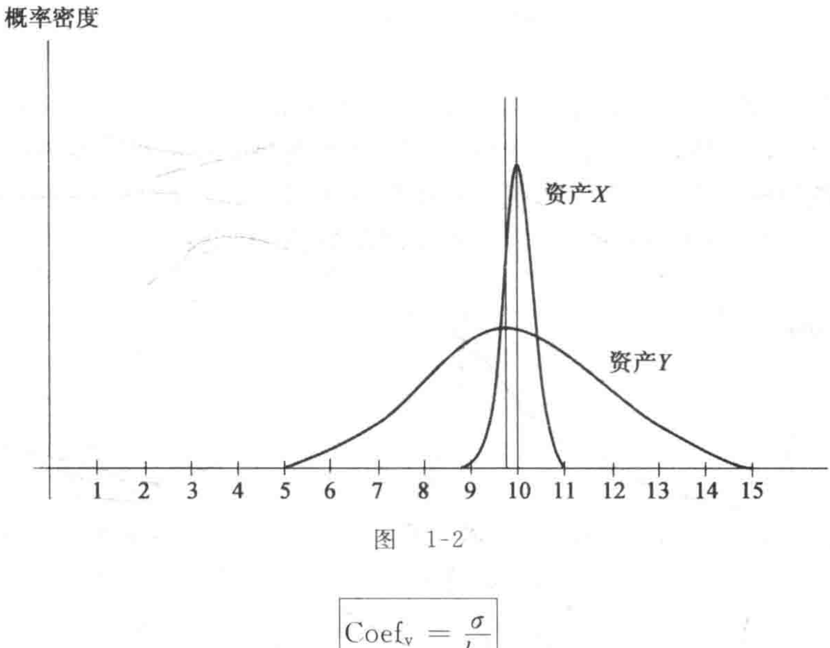


图 1-2

$$\boxed{\text{Coef}_{\text{v}}=\frac{\sigma}{k_e}}$$

所以，对资产 X 和 Y，我们得到

$$\text{Coef}_{\text{v}}^{x}=\frac{\sigma_x}{k_e^x}=\frac{0.0073}{0.098}=0.074$$

$$\text{Coef}_{\text{v}}^{y}=\frac{\sigma_y}{k_e^y}=\frac{0.0353}{0.10}=0.353$$

资产 Y 的变异系数(0.353)高证实了它的风险比资产 X 更大. 一般地，变异系数越高，和资产相伴随的风险越大. 但是，值得一提的是，当我们比较具有相等预期回报的资产时，变异系数检验将和标准差检验没有差异，但是当预期回报不同的时候，将会产生差异. 在我们的例子中，仅确认标准差检验，但这不是很必要的情形. 有时候，将会有违背标准差的情形.

例 1.2.1 显示在表 E1-2-1 中的两种资产哪一种风险较大？使用标准差和变异系数两种方法检验.

表 E1-2-1

	资产 Ⅰ	资产 Ⅱ
期望回报	3%	12%
标准差	4.9%	5.5%
变异系数	1.63	0.46

基于标准差，资产Ⅱ比资产Ⅰ(4.9)有较高的标准差(5.5)，因此资产Ⅱ是高风险的. 但是基于变异系数检验，资产Ⅰ比资产Ⅱ(0.46)有较高系数(1.63)，所以资产Ⅰ是高风险的. 哪一种检验更加可靠呢？变异系数检验更加可靠.

长期风险

在长期运行中，资产风险似乎是一个关于时间的递增函数. 换句话说，当时间过去，回报的变异性增大，风险也增长. 这就是为什么经验表明，一项投资资产的寿命越长，包含在资产中的风险也就越高. 假设回报的期望保持相同，图 1-3 表明一项资产回报分布的离差如何变宽，以及围绕均值的一个标准差如何在 20 年期间变大.

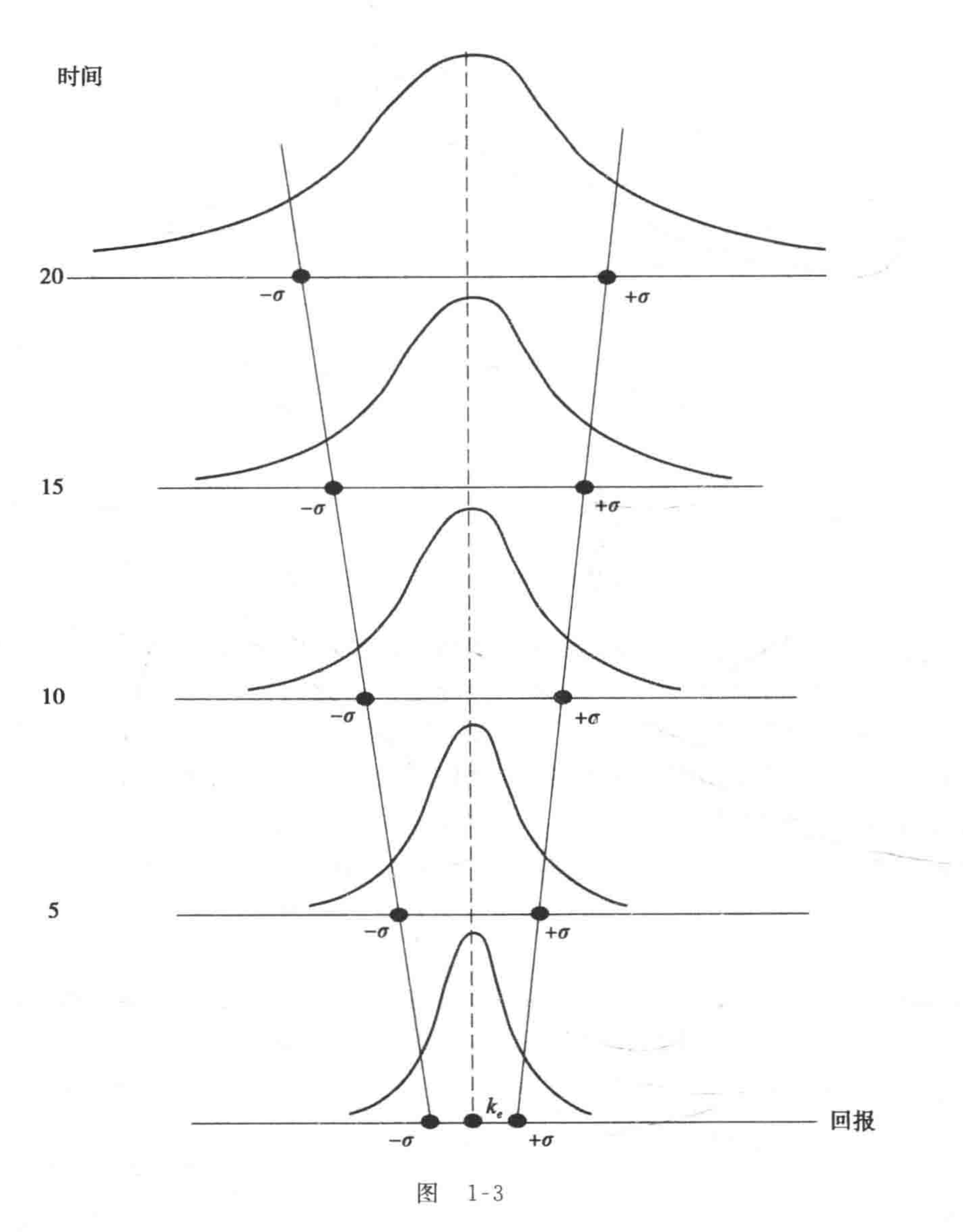


图 1-3

1.3　风险规避和风险溢价

风险规避是指避免风险情形的一般常见行为. 在平均的意义上来看，大多数投资者都是规避风险的，他们通常选择风险较小的投资. 这种偏好伴随着对较少风险投资的较低预期回报. 这也表明如果一个投资者选择投资较高风险资产，她或他将预期收获较高平均回报的酬金，也预期花费更低的投资成本. 一般来说，风险规避的主要含义指一种证券风险越高，它的平均成本也越高，价格也就越低. 让我们假设投资机会 A 比投资机会 B 风险更高，并且假设二者有相同的股份价格 80 美元，也有相同的每股 8 美元的平均回报. 因为投资人一般选择最低风险进行投资，那么对投资 B 将有较高需求，而对投资 A 则需求较低. 经过合理的时间之后，对投资 B 的需求提高，而对投资 A 的需求降低，这将增加 B 的价格，而降低 A 的价格. 让我们假设 B 的价格将升到 100 美元，而 A 的价格将降到 60 美元. 现在，对两种资产各自的回报率将不再是 10%(8/80). 资产 B 的回报率将是 8/100＝8%，并且 A 的回报率将是 8/60＝13.3%. 在两种投资回报率上的差异是由于风险规避造成的需求变化带来了价格的变化所形成的，被称为**风险溢价**. 在举例中这种情形下，风险溢价是 13.3%－8%＝5.3%. 这就是为什么较大风险证券必须用比低风险证券更高的平均回报来吸引和酬谢它们的投资者.

1.4　投资组合层次的回报和风险

到目前为止，对个人资产或单项投资机会的回报和风险的讨论已经很深入. 在实际中单项资产孤立设置并不常见. 金融资产和投资机会通常以组来定位，并且也以财务投资组合来管理. 公司投资、商业基金、银行账号、保险和养老基金以及个人投资都是以更加多样性的投资组合的形式持有. 因此，相对于单项资产，谈论整个投资组合的回报和风险将是更加现实的. 只有当投资组合的单个部分影响了整个投资组合的时候，其回报和风险才将变得重要.

投资组合回报

投资组合更大可能包含了许多个体资产，每个都有不同的比例. 整个投资组合的市场价值(V_p)将是所有个体资产价值(V_i)的总和.

$$V_p = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$$

每种资产价值将有它自己的比例，来表示权重(w_i)：

$$w_i = \frac{V_i}{V_p}$$

其中

$$w_i = w_1, w_2, w_3, \cdots, w_n$$

并且，所有个体的权重加起来为投资组合的总权重：

$$w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n = 1$$

以相同的形式，所有这些个体资产(V_i)的回报将构成投资组合的回报(r_p)，并且要乘以各自的权重.

$$r_p = r_1 w_1 + r_2 w_2 + \cdots + r_n w_n$$

$$\boxed{r_p = \sum_{i=1}^{n} r_i w_i}$$

即投资组合回报是它的分量资产的个体回报的加权总和，权重是这些资产占整个资产的比例.

例 1.4.1　一个投资者的投资组合包含了两种不同的股票、两种不同的债券和两种不同的共同基金，用表 E1-4-1 显示的比例和回报，计算投资组合的回报.

表　E1-4-1

资产	$r_i(\%)$	$w_i(\%)$	$r_i w_i$
股票 Ⅰ	13.5	23	0.0311
股票 Ⅱ	12	18	0.0216
债券 Ⅰ	6.5	15	0.009 75
债券 Ⅱ	6	15	0.009
基金 Ⅰ	7.5	17	0.012 75
基金 Ⅱ	7	12	0.0084
			投资组合回报 $= \sum_{i=1}^{6} r_i w_i = 0.0926$

投资组合的回报是 9.26%.

有另外的办法来计算在某个时期基于整个市场价值变化的投资组合回报价值的改变量. 对原始价值的比率将用来估计回报率. 换句话说，这里资产组合回报率仅仅是整个投资组合在两个时间点价值的百分数变化：

$$\boxed{r_p = \frac{V_p^2 - V_p^1}{V_p^1}}$$

其中 V_p^1 是整个投资组合在当年初的市场价值，而 V_p^2 是整个投资组合在当年末的市场价值.

例 1.4.2　假设对一项小商业的投资组合在某个时点估计为 425 000 美元，一年后它的市场价值涨到 538 620 美元，即 $V_p^1 = 425\,000$ 美元；$V_p^2 = 538\,620$ 美元. 投资组合回报率是多少？

$$r_p = \frac{V_p^2 - V_p^1}{V_p^1}$$

$$r_p = \frac{\$538\,620 - \$425\,000}{\$425\,000}$$

$$r_p = \frac{\$113\,620}{\$425\,000} = 26.7\%$$

投资组合预期回报率(k_p)将用和投资组合回报相同的模式计算，即加权个体预期回报率(k_{ei})的和：

$$k_p = \sum_{i=1}^{n} k_{ei} w_{ei}$$

投资组合风险

跟投资组合回报不同，投资组合风险不是分量个体风险的加权平均．投资组合风险能通过加入更多不同的资产到组合中以降低风险．换句话说，投资组合越多种多样，总的投资组合风险就越低．更加重要的是投资组合中个体资产之间的相关程度．资产相关性越小，投资组合的风险越低．在这个意义上，在减小投资组合风险方面，除非投资组合包含了负相关资产，或者至少包含最低正相关资产，否则多样性将不是有效的．相关系数(Corr)能度量两个变量如何相互之间对抗运动．Corr 值波动范围从－1(指当变量在相反方向移动时完全负相关)到 1(指当变量在相同方向移动时完全正相关)．如果多样性包括了负相关资产，它们将相互之间反向移动，而且影响将会相互抵消，结果导致风险降低．然而，如果多样性带有强正相关资产，风险不能被多元化．下面的例子反映出正和负相关资产回报是如何影响投资组合风险的．

例 1.4.3　让我们观察两对资产集 X 和 Y 以及 Z 和 W．表 E1-4-3a 显示了资产 X 和 Y 的回报，这里两个回报率的方差被单独在 7 列和 12 列计算．

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{5} (k_i^x - k_e^x)^2 \cdot \mathrm{Pr}_i = 0.046$$

和

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{5} (k_i^y - k_e^y)^2 \cdot \mathrm{Pr}_i = 0.067$$

两种回报率的标准差为

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} (k_i^x - k_e^x)^2 \cdot \mathrm{Pr}_i} = \sqrt{0.046} = 0.214$$

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} (k_i^y - k_e^y)^2 \cdot \mathrm{Pr}_i} = \sqrt{0.067} = 0.259$$

两个回报率之间的协方差 $\mathrm{Cov}(x, y)$ 计算在 13 列

$$\mathrm{Cov}(x,y) = \sum_{i=1}^{5} (k_i^x - k_e^x)(k_i^y - k_e^y) \cdot \mathrm{Pr}_i = 0.0554$$

最后，两个回报率之间的相关系数(Corr)为

$$\mathrm{Corr}_{x,y} = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{0.0554}{0.214 \times 0.259} = 99.9\%$$

接近+100 的相关系数意味着资产完全正相关，它们显示出相似的向上或向下的运动趋势．这种组合类型将不利于减小风险的多样性．图 E1-4-3a 展示了这些资产在回报方面同步化的运动．

表 E1-4-3a　资产 X 与 Y 的回报

(1)	(2)	资产 X (3)	(4)	(5)	(6)	(7)	资产 Y (8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
	Pr_i	k_i^x	k_e^x	$k_i^x-k_e^x$	$(k_i^x-k_e^x)^2$	$(k_i^x-k_e^x)^2\cdot Pr_i$	k_i^y	k_e^y	$k_i^y-k_e^y$	$(k_i^y-k_e^y)^2$	$(k_i^y-k_e^y)^2\cdot Pr_i$	$(k_i^x-k_e^x)(k_i^y-k_e^y)\cdot Pr_i$
			$\frac{\sum k_i^x}{5}$	(3)−(4)	$(5)^2$	(6)(2)		$\frac{\sum k_e^y}{5}$	(8)−(9)	$(10)^2$	(11)(2)	(5)(10)(2)
k_1	0.20	−0.12	0.155	−0.275	0.0756	0.015	−0.15	0.174	−0.324	0.105	0.021	0.0178
k_2	0.15	0.405	0.155	0.25	0.0625	0.0094	0.50	0.174	0.326	0.1063	0.016	0.0122
k_3	0.25	−0.07	0.155	−0.225	0.0506	0.0126	−0.08	0.174	−0.254	0.0645	0.016	0.0143
k_4	0.18	0.38	0.155	0.225	0.0506	0.0091	0.45	0.174	0.276	0.0762	0.014	0.0112
k_5	0.22	0.18	0.155	0.025	0.000 625	0.000 14	0.15	0.174	−0.024	0.000 58	0.000 13	−0.000 13
						0.046					0.067	0.0554

第二种资产集就是表 E1-4-3b 中提到的 Z 和 W，相同的参数用和表 E1-4-3a 中相同的方式去计算．资产的方差在 7 列和 12 列：

$$\sigma_z^2=\sum_{i=1}^{5}(k_i^z-k_e^z)^2\cdot \mathrm{Pr}_i=0.0339$$

$$\sigma_w^2=\sum_{i=1}^{5}(k_i^w-k_e^w)^2\cdot \mathrm{Pr}_i=0.0129$$

标准差是

$$\sigma_z=\sqrt{0.0339}=0.1841$$

$$\sigma_w=\sqrt{0.0129}=0.1136$$

协方差在 13 列计算

$$\mathrm{Cov}(z,w)=\sum_{i=1}^{5}(k_i^z-k_e^z)(k_i^w-k_e^w)^2\cdot \mathrm{Pr}_i=-0.020\,353$$

相关系数(Corr)是

$$\mathrm{Corr}_{z,w}=\frac{\mathrm{Cov}(z,w)}{\sigma_x\sigma_w}=\frac{-0.020\,353}{0.1841\times(0.1136)}=97.3\%$$

−97.3%的相关系数表明情形跟 X 和 Y 组合相反．它表明资产 Z 和 W 几乎完全负相关，意味着这些资产的回报相互之间上升和下降是相反的．对这些资产来说，这是资产回报相互抵消的理想机会——如果一个下降，另一个上升予以补偿，这就是多样性的美妙之处．这种资产组合可以去掉风险的多样性影响．图 E1-4-3b 展示了回报模式如何在一致性显著的方式上相互反向行动．

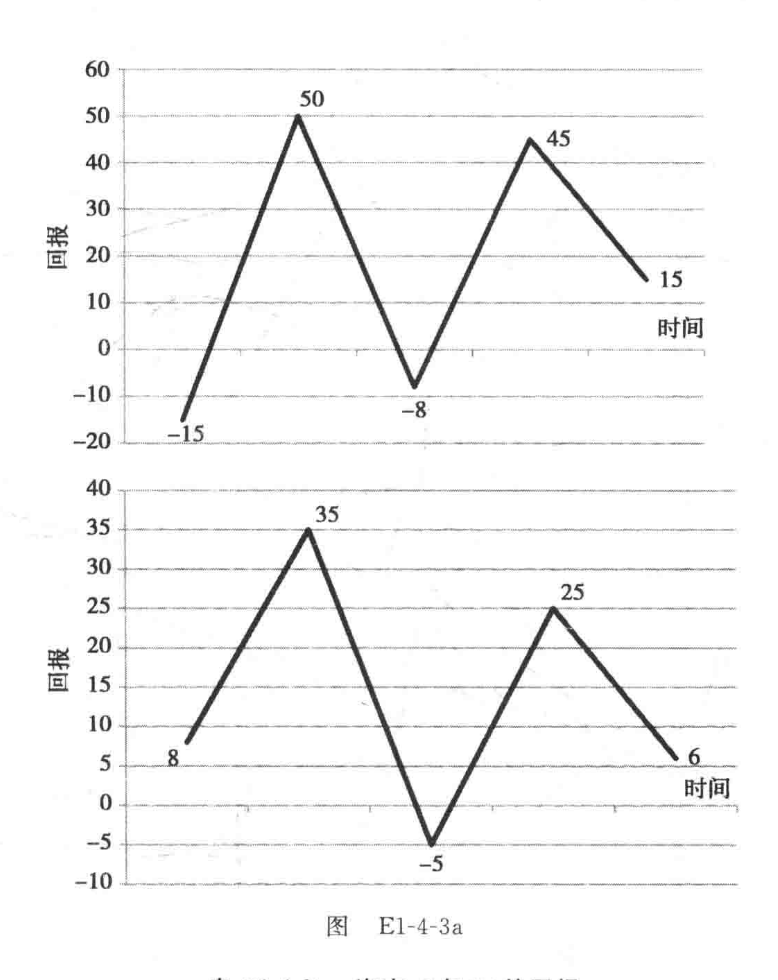


图　E1-4-3a

表 E1-4-3b　资产 Z 与 W 的回报

(1)	(2)	资产 Z (3)	(4)	(5)	(6)	(7)	资产 W (8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
	Pr_i	k_i^z	k_e^z	$k_i^z-k_e^z$	$(k_i^z-k_e^z)^2$	$(k_i^z-k_e^z)^2\cdot\mathrm{Pr}_i$	k_i^w	k_e^w	$k_i^w-k_e^w$	$(k_i^w-k_e^w)^2$	$(k_i^w-k_e^w)^2\cdot\mathrm{Pr}_i$	$(k_i^z-k_e^z)(k_i^w-k_e^w)\cdot\mathrm{Pr}_i$
k_1	0.20	0.40	0.20	0.20	0.04	0.008	0.08	0.138	−0.058	0.0034	0.000 68	−0.002 32
k_2	0.15	0.10	0.20	−0.10	0.01	0.0015	0.35	0.138	0.212	0.045	0.006 75	−0.003 18
k_3	0.25	0.38	0.20	0.18	0.0324	0.0081	−0.05	0.138	−0.188	0.0077	0.001 925	−0.008 46
k_4	0.18	−0.10	0.20	0.30	0.09	0.0162	0.25	0.138	0.112	0.0125	0.002 25	−0.006 05
k_5	0.22	0.22	0.20	0.02	0.0004	0.000 088	0.06	0.138	−0.078	0.0061	0.001 342	−0.000 343
						0.0339					0.0129	−0.020 353

组合资产可能减小风险，甚至对那些正相关的资产也有作用．在表 E1-4-3c和 E1-4-3d 中，我们把资产 X 和 Y 组合到一起，得到了一个组合 XY 的回报的平均向量．我们也把资产 Z 和 W 组合在一起，得到了组合 ZW 回报的平均向量．标准差检验表明即使对完全正相关的组合 X 和 Y，如同我们已经看到的一样，组合也有助于降低风险．组合集 XY 的标准差($\sigma_{xy}=0.195$)仍然低于单个资产标准差 $\sigma_x=0.214$ 和 $\sigma_y=0.259$ 中的任何一个．这就意味着组合资产表现出和单一资产不一样的风险．标准差检验说明当我们组合负相关资产 Z 和 W 的时候，能得到风险更小的较好结果．组合集 ZW 的标准差($\sigma_{zw}=0.056$)比任何一项

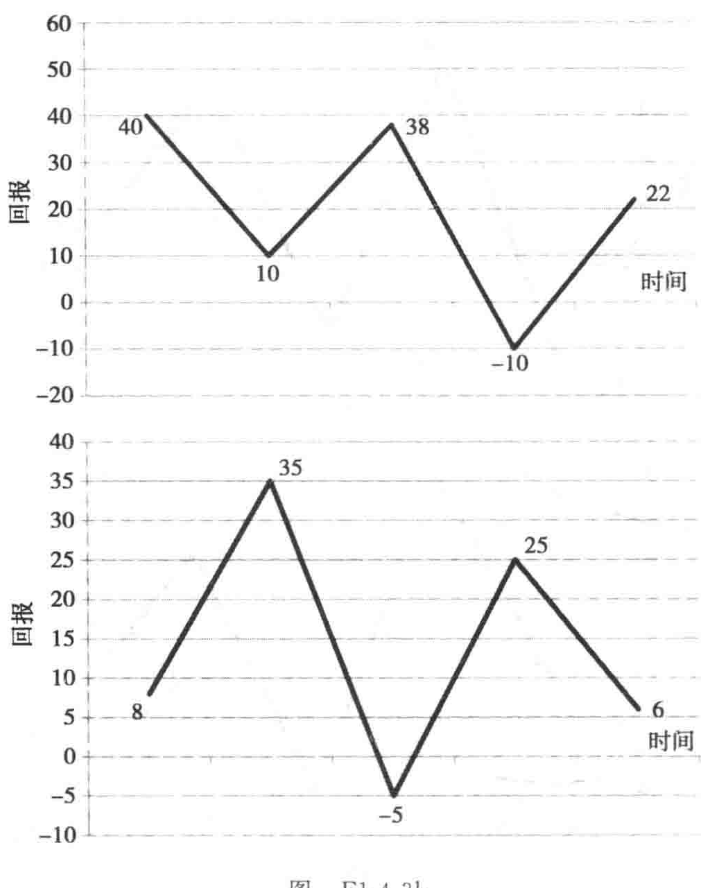


图　E1-4-3b

资产标准差 $\sigma_z=0.1841$ 和 $\sigma_w=0.1136$ 都要小很多．这进一步证明了组合资产将增加资产的多样性，并且减小了风险．然而，风险降低的程度主要依赖于资产之间相关的程度和显著性．在现实中，绝大多数资产都是正相关的．研究表明通常随机选择的资产表现出大约 0.60 的相关性．正相关性越低，组合的结果越好．

表 E1-4-3c　资产 X 与 Y 组合的平均回报

回报	$\Pr_i$	k_i^{xy}	k_e^{xy}	$k_i^{xy}-k_e^{xy}$	$(k_i^{xy}-k_e^{xy})^2$	$(k_i^{xy}-k_e^{xy})^2\cdot\Pr_i$
k_1	0.20	−0.135	0.164	0.029	0.000 84	0.000 17
k_2	0.15	0.452	0.164	0.288	0.083	0.0124
k_3	0.25	−0.075	0.164	−0.239	0.057	0.0142
k_4	0.18	0.415	0.164	0.251	0.063	0.0113
k_5	0.22	0.165	0.164	0.001	0.000 001	0.000 000 22
				$\sum_{i=1}^{5}(k_i^{xy}-k_e^{xy})^2\cdot\Pr_i$		0.038

表 E1-4-3d　资产 Z 与 W 组合的平均回报

回报	Pr_i	k_i^{zw}	k_e^{zw}	$k_i^{zw}-k_e^{zw}$	$(k_i^{zw}-k_e^{zw})^2$	$(k_i^{zw}-k_e^{zw})^2\cdot Pr_i$
k_1	0.20	0.24	0.169	0.071	0.005 04	0.001
k_2	0.15	0.225	0.169	0.056	0.003 14	0.000 47
k_3	0.25	0.165	0.169	−0.004	0.000 016	0.000 004
k_4	0.18	0.075	0.169	−0.094	0.008 84	0.001 59
k_5	0.22	0.14	0.169	−0.029	0.000 84	0.000 18
				$\sum_{i=1}^{5}(k_i^{zw}-k_e^{zw})^2\cdot Pr_i$		0.0032

在另外一种抽象描述中，图 1-4 表明投资组合两种资产的三种可能途径：两种极端组合和一种一般组合．资产是具有预期回报 k_A 和风险水平 σ_A 的资产 A，以及具有较高预期回报 k_B 和较高风险水平 σ_B 的资产 B.

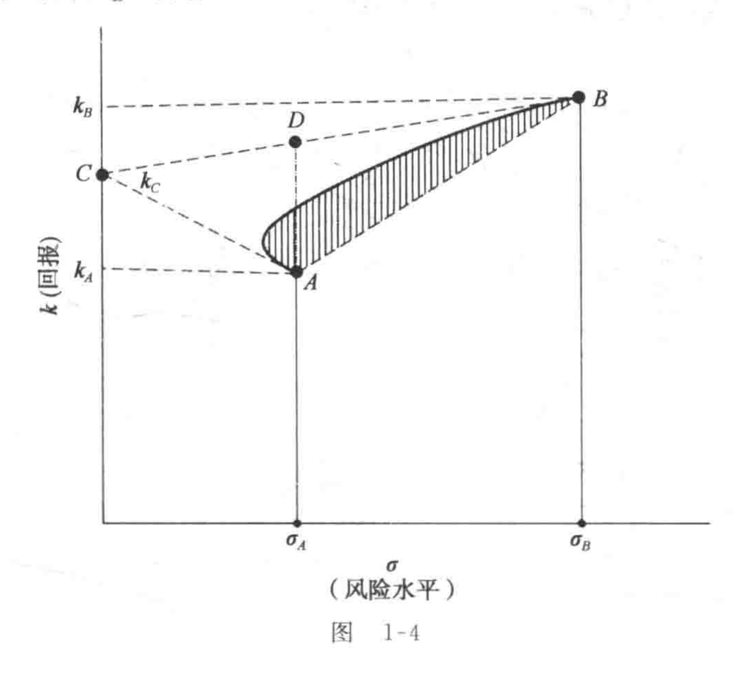


图　1-4

- 如果 A 和 B 完全正相关，组合的第一种极端情形发生在直线 AB 上任意点．这种组合不能从多样性中获取更大利益.
- 当两种资产配置能达到与它们风险水平成反比例时，组合的第二种极端情形发生在 BCA 的任意点，在 BCA 上可能达到具有回报率等于 k_c 的零风险．这种组合显示了多样性受益的情形.
- 组合的第三种情形发生在曲线 BA 的任意点．因为资产之间通常既非负的完全相关，也非正的完全相关，所以就注定了这种情形发生的可能性更大．相关常常是一种稳健的水平，并且资产组合将介于从 k_A 到 k_B 的较大的回报范围以及从 σ_A 到 σ_B 的较大的风险水平范围．曲线将包括所有可能的组合，这些组合对直线 AB 上的任意点都是较好的可选替换组合，但对 BCA 上的大多数点来说却是较低的可选替换组合，特别是在 BD 段上对相同风险水平将提供较高的回报率.

1.5 马科维茨两资产投资组合

回顾有关风险和回报以及投资组合的大量研究成果，首创性研究当推 Harry Markowitz 在 1952 年发表的文献(Journal of Finance，7，pp. 77-91). 其中讨论的主要问题是资产的分散投资和投资组合回报的积极结果(来源于不同方向上投资的补偿效应). 一个众所周知的基本例子说明了把两个不同回报和风险比率的个体资产组合成投资组合对回报和风险的影响.

图 1-5 表明如果一个投资者决定投资两个不同股票选项：具有 8%预期回报、15%低风险(用回报的标准差表示)的股票Ⅰ(S_{I})，以及提供了 12%高回报，但有 22%高风险的股票Ⅱ(S_{II}). 如果我们知道投资者愿意对每种股票贡献多少投资额，那么应该对混合资产计算回报和风险. 我们假设投资者或资产组合管理者愿意把 55%投资到股票Ⅰ，45%投资到股票Ⅱ. 投资组合的回报率将用两种回报的加权平均计算.

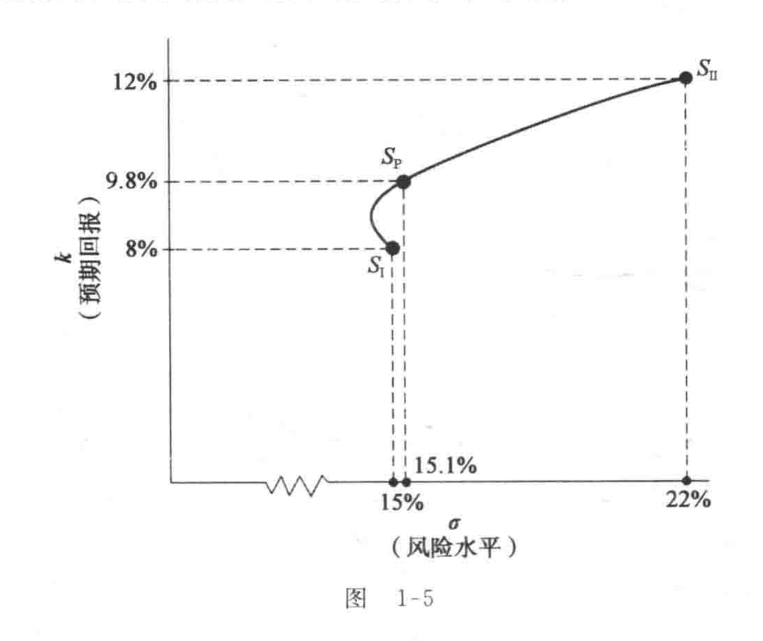


图 1-5

$$k_p = w_1 k_1 + w_2 k_2 = 0.55 \times 0.08 + 0.45 \times 0.12 = 9.8\%$$

给定两种资产之间相关系数 0.38，投资组合的风险可以用组合资产的标准差来确定.

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{I},\mathrm{II}} &= \sqrt{\sigma_{\mathrm{I}}^2 w_{\mathrm{I}}^2 + \sigma_{\mathrm{II}}^2 w_{\mathrm{II}}^2 + 2\mathrm{Corr}_{\mathrm{I},\mathrm{II}}(w_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{I}})(w_{\mathrm{II}}\sigma_{\mathrm{II}})} \\ &= \sqrt{0.15^2 \times 0.55^2 + 0.22^2 \times 0.45^2 + 2 \times 0.38 \times 0.55 \times 0.15 \times 0.45 \times 0.22} \\ &= \sqrt{0.0228} = 15.1\%\end{aligned}$$

所以，在一种资产的组合股票中，风险水平将小于两种个体资产的加权平均风险，该加权风险将是

$$0.55 \times 0.15 + 0.45 \times 0.22 = 18.2\%$$

因此，S_{P} 的资产组合在 15.1%的合理风险水平上得到 9.8%的回报率. 假设的例子中只有两种资产，而在市场投资的现实中，我们将发现构成诸多组合的大量资产，这些资产

能产生大量的投资组合. 图 1-6 中的破蛋形区域显示，对所有具有不同主观、风险和回报偏好的投资者，所有资产的组合都是可得到的.

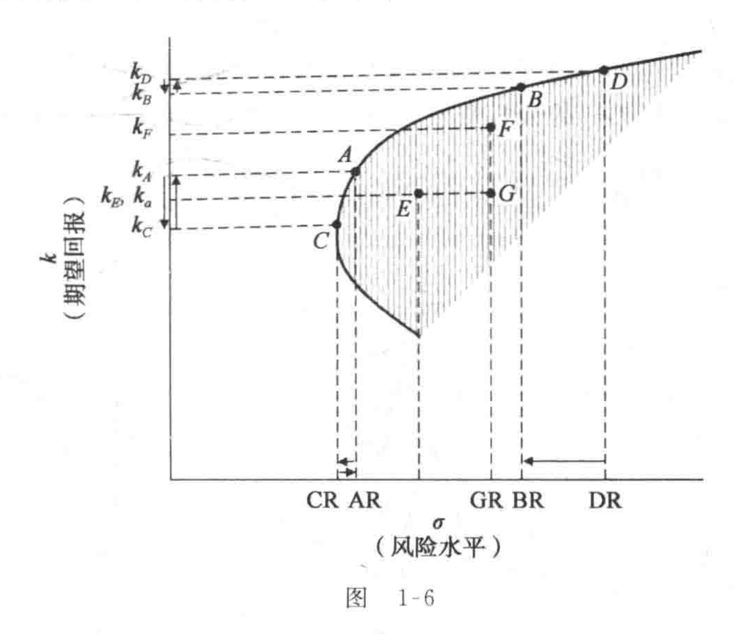


图 1-6

- 涂有阴影的破蛋形区域，是资产所有可能的投资组合，代表了投资者对风险和回报的偏好的广泛范围.
- 实曲线表示对任意给定在 CR 和 DR 之间的风险水平，多元化投资组合具有最高回报. Markowitz 称其为**有效组合曲线**，它也被称为**风险组合边界**.
- 点 D 是得到最高回报(k_D)，但是承受最高水平风险(DR)的投资组合.
- 点 C 是得到最低回报(k_C)，但是承受最低水平风险(CR)的投资组合.
- DB 段包括了在风险和回报之间偏好风险一边的投资组合集. 比如，从 D 移动到 B 就意味着得到比 k_D 略微降低的回报，却从 DR 到 BR 更大地降低了风险水平. 类似地，从 B 移动到 D 就意味着比 k_B 略微增高了回报，但从 BR 到 DR 却面临更多风险.
- AC 段包括了在风险和回报之间偏好回报一边的投资组合集. 比如，从 A 移动到 C 就意味着接受回报从 k_A 到 k_C 有较大降低，却从 AR 到 CR 降低了较小的风险水平. 类似地，从 C 移动到 A 就意味着得到更高的回报，却接受了从 CR 到 AR 多一点的风险.
- AB 段包括了所有投资组合，在风险和回报之间展示了几乎对等的交易. 换句话说，得到或失去的回报额伴随着得到或者失去共生的风险额.
- 在阴影内我们可以观察到，沿着东北方向移动意味着得到高回报和高风险的投资组合；相反，沿着西南方向移动则意味着将得到低回报和低风险的投资组合.
- 组合 F 优于组合 G，是因为对于相同的风险额，它可以得到更多回报.
- 组合 E 优于组合 G，是因为对相同的回报率，它热衷于更低风险水平.

1.6　无风险回报率借贷

看图 1-7，我们假设一位投资者想分解他的初始投资，该初始投资包括有效投资组合曲线上的资产 A 和提供 5%无风险回报率的美国国库券．假设资产 A 在 15%风险水平上收益 12%．投资者愿意拿出 60%的钱投资资产 A，40%投资在美国国库券．

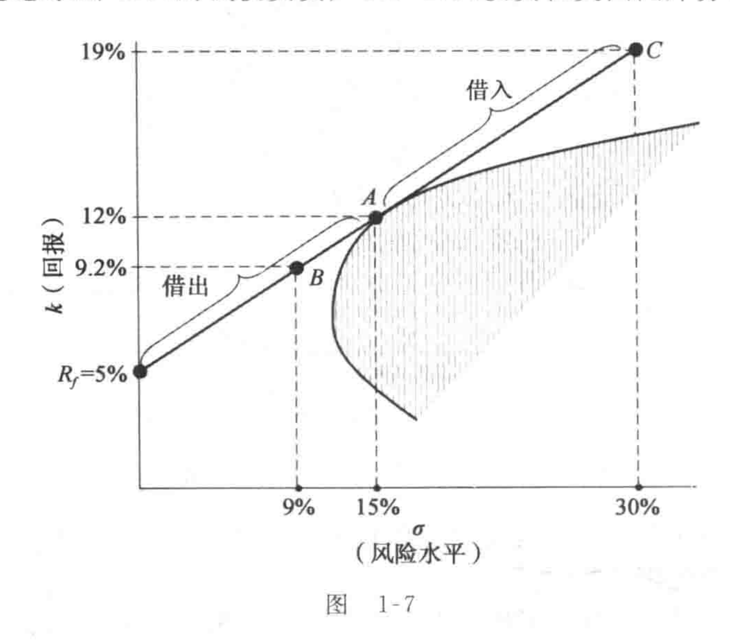


图　1-7

在这种情形下，投资者借给国库券 40%的钱．他的回报将是

$$0.40 \times 0.05 + 0.60 \times 0.12 = 9.2\%$$

他的风险水平是

$$0.40 \times 0 + 0.60 \times 0.15 = 9\%$$

他将在点 B．这意味着他可以在沿着线 AR_f 上的任意点，这主要依赖于他在资产 A 和国库券之间的投资比例．

现在，让我们假设他以无风险利率 5%借入等于他所有数额的钱，并且把他自己的和借来的钱全部投入到资产 A．他的回报将是

$$2 \times 0.12 - 0.05 = 19\%$$

他的风险将是

$$2 \times 0.15 + 0.5 \times 0 = 30\%$$

他将在点 C，这就意味着他将在沿 CA 上的任意点，这依赖于他将借多少钱和可以承受多少风险．

1.7　风险类型

我们目前讨论的单个资产和投资组合的风险都是可分散的风险类型，即通过投资组合中资产的多样性能够降低风险．这种类型通常是企业特有的风险，称为**非系统性风险**，它关系到内部条件和环境，随企业不同而不同．对一家特定的企业而言，这类风险来源于随

机的特定事件，例如公司卷入的诉讼，公司实行的市场方案，它面对的工人罢工，或者它得到或失去的合同类型和数量. 所有这些事件和环境能够用某种程度的公司资产分散化来缓和. 另外一种风险类型是不可分散的，称为**系统性风险**，它是普遍存在的且和市场相关的. 它会同时且没有区别地影响到所有公司. 经济状态是个经典的例子，被诸如通货膨胀、衰退、失业利率波动、战争、恶劣的天气或政治动荡显著影响. 没有办法和措施消除或减小这些来自外部的风险，也不能通过资产的分散化规避风险. 可是，我们可以通过监控一项特殊的资产对市场环境和变化如何做出反应来评估它，并且通过资本资产定价模型定位它，通过金融 beta 来度量它. 图 1-8 表明，作为一项金融组合包含了众多的个体资产和证券，组合的风险趋向于降低直到渐近地接近系统性的、不可分散的风险. 对于组合中任意数目的单个证券(例如 a 或 d)，我们可以看到可分散的和不可分散的风险是如何分配的.

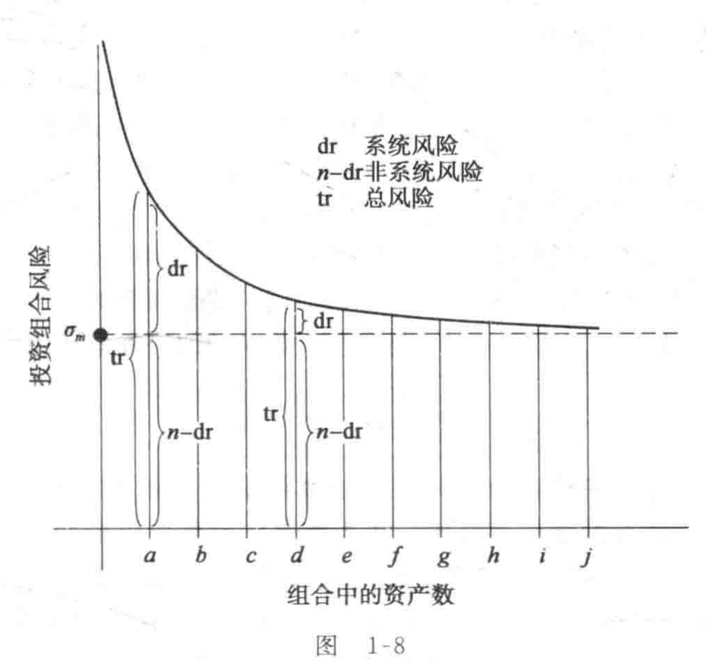


图 1-8

第2章　资本资产定价模型

资本资产定价模型(CAPM)是一种用于分析金融资产的期望收益与不可分散市场风险之间的关系的一种工具．这个模型的主要组成部分是贝塔系数(β)，这个系数我们之前已经提到，但是在本章中将更加详细地介绍．

2.1　金融 β

beta(β)是一种用来测量不可分散系统风险的数学工具．从这个角度来说，它是一个反映证券收益随着证券市场变动的程度指数．这使它可以衡量与代表市场状态的证券均值相关的证券波动．市场收益是在一段特定时间内所有在证券市场上的证券交易的收益和．β 值可正可负，并且一般取值在－2.5至2.5之间．β 为1表示市场风险对其完全影响．任何一只 β 为1的证券表示这种证券收益模式是与市场收益变动完全一致的．β 为0表明其完全独立于市场影响．β 大于1，例如为2，表明这只证券的波动是市场上的平均波动的两倍．β 为负的意义为资产收益模式与市场收益变动完全相反，表2-1给出了一些美国公司在某个时间点上估计的 β．对于同一个公司的 β 估计值是随着时间的变化而变的．

从数学上来说，β 是单只证券收益(k_i)与市场收益(k_m)的协方差除以市场收益的方差．

$$\boxed{\beta = \frac{\mathrm{Cov}(k_i, k_m)}{\mathrm{Var}(k_m)}}$$

也就是说，β 是一种评估一只证券收益与市场上其他证券的相关程度的概念．从另一个角度来讲，β 是一只证券收益的变化百分比，作为衡量它对外部市场变动做出的反映．因此，它可以被认为是一给定资产相对于市场变化的金融弹性变化．因此，β 是市场收益和相应的资产回报的回归线的斜率．在图2-1中，市场收益的变动在横轴上找到，并且给定证券对其的反映在纵轴上找到．回归线的斜率代表 β，它是纵轴的改变量与横轴的改变量之比，结果就是回归线：$y=\alpha+\beta x+\mathrm{e}$.

$$\mathrm{beta}=\beta=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

表2-1　部分美国企业 β 估计值

公司	β
AOL	2.46
Dell	2.23
Microsoft	1.82
Texas Instrument	1.75
Intel	1.70
GE	1.16
GM	1.10

（续）

公司	β
Colgate-Palmolive	1.03
Family Dollar Store	0.99
K-Mart	0.98
ATT	0.98
McGraw-Hill	0.81
Gillette	0.76
MY Times	0.71
JC Penney	0.52
Johnson & Johnson	0.49
Campbell	0.41
Exxon	0.36

如果我们追寻市场利率的变化，当它从 7.3 增加到 9.3，则线性方程 $y=-8+1.5x$ 会使资产 k_i 的收益从 3 增加到 6. 所以，我们可以得到其斜率：

$$\text{斜率} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-3}{9.3-7.3} = \frac{3}{2} = 1.5$$

其是公式中的 β 值. 这表明资产收益率遵从市场收益，但是其波动可能更加强烈，它的波动是市场收益波动的 1.5 倍. 例如，如果市场利率增加到 5%，这个资产的利率会增加到 7.5%.

我们也可以用公式计算出 β.

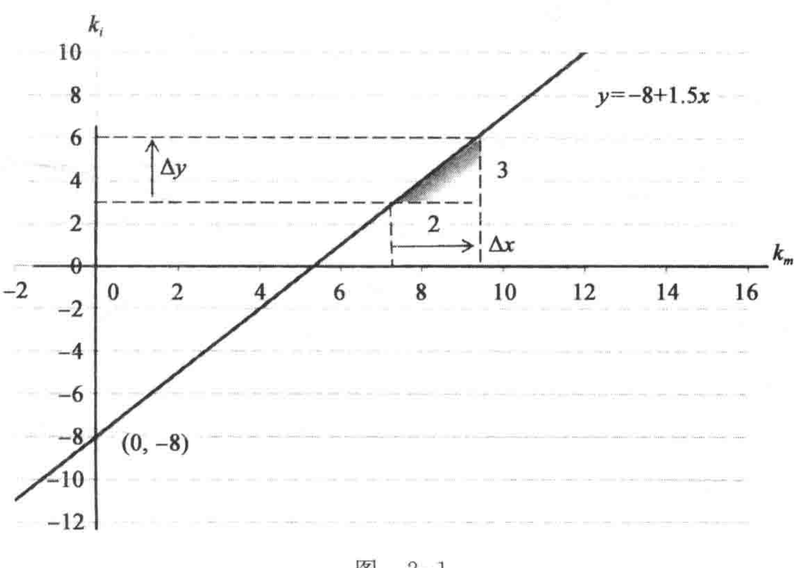


图 2-1

例 2.1.1 我们以 10 个给定周期收益率(k_i^x)和同一时期的市场收益率(k_i^m)来计算公司 X 的β. 在表格 E2-1-1 中，我们以均值 k_e^x 和 k_e^m 作为两者的期望收益，并且可继续计算

两收益率的协方差与市场方差．β 可以以协方差和市场方差来计算．

$$\mathrm{Cov}(x,m)=\sum_{i=1}^{10}(k_i^x-k_e^x)(k_i^m-k_e^m)/N=\frac{0.047\ 73}{10}=0.0048$$

$$\mathrm{Var}(m)=\sum_{i=1}^{10}(k_i^m-k_e^m)^2/N=\frac{0.0348}{10}=0.0035$$

$$\beta_x=\frac{\mathrm{Cov}(x,m)}{\mathrm{Var}(m)}=\frac{0.0048}{0.0035}=1.37$$

注意：β_x 只是资产 X 的 β 值．投资组合的 β 会与投资组合中所有资产 β 的加权平均相等．

$$\beta_p=\sum_{i=1}^{n}\beta_i w_i$$

表 E2-1-1　10 个同期内的企业 X 与市场的回报率

	企业 x			市场				
Period	k_i^x	k_e^x	$k_i^x-k_e^x$	k_i^m	k_e^m	$k_i^m-k_e^m$	$(k_i^m-k_e^m)^2$	$(k_i^x-k_e^x)(k_i^m-k_e^m)$
1	−0.06	0.105	−0.165	0.027	0.082	−0.055	0.003	0.0091
2	0.27	0.105	0.165	0.095	0.082	0.013	0.000 17	0.0021
3	0.065	0.105	−0.04	0.038	0.082	−0.044	0.0019	0.0018
4	0.13	0.105	0.025	0.055	0.082	−0.027	0.000 73	−0.000 67
5	0.055	0.105	−0.05	−0.017	0.082	−0.099	0.0098	0.0049
6	0.28	0.105	0.175	0.176	0.082	0.094	0.0088	0.0164
7	−0.045	0.105	−0.15	0.119	0.082	0.037	0.0014	−0.0055
8	0.03	0.105	−0.075	0.128	0.082	0.046	0.0021	−0.0034
9	0.35	0.105	0.245	0.156	0.082	0.074	0.0055	0.0181
10	−0.025	0.105	−0.13	0.044	0.082	−0.038	0.0014	0.0049
							0.0348	0.04773

其中 β_p 为投资组合的 β，β_i 是投资组合中某一资产的 β，w_p 是投资组合包含的 n 个资产中资产 i 的权重．

2.2　CAPM 公式

既然知道了什么是 β，我们就可以写出资产定价模型的主要公式，其中 β 是一个必要因素，可以计算任意资产的必要收益率(k_m)、市场必要收益率和无风险利率(R_f)(一般是指美国长期国债的收益率)．

$$\boxed{k_i=R_f+\beta_i(k_m-R_f)}$$

在此模型中任意资产的必要收益率是通过无风险资产收益率和市场风险溢价相加所得．这个溢价的定义如下：

1. 必要市场收益率与无风险利率之差：k_m-R_f．
2. 通过乘上 β 来调整资产风险指数：$\beta_i(k_m-R_f)$．

例 2.2.1　当给定一家公司 Y 的 β 为 1.85，市场投资组合收益率为 12%，无风险利率为 6.5%，那么 Y 的必要收益率为多少？

$$k_i = R_f + \beta_i(k_m - R_f) = 0.065 + 1.85 \times (0.12 - 0.065) = 16.67\%$$

所以市场风险溢价为 5.5%(0.12－0.065)，当被调整为资产风险指数，它变为稍大于 10%．当调整后的资产风险指数加上无风险利率(6.5%)，我们就可以得到该公司的必要收益率为 16.67%．

用代数方法来看，如果公式中的其他变量都可以得到，则 β_i、R_f 和 k_m 中的任意一个均可得出．为了得到 β：

$$k_i = R_f + \beta_i(k_m - R_f)$$

$$k_i - R_f = \beta_i(k_m - R_f)$$

$$\boxed{\beta_i = \frac{k_i - R_f}{k_m - R_f}}$$

$$\beta_i = \frac{0.1667 - 0.065}{0.12 - 0.065} = 1.85$$

为了得到无风险利率 R_f：

$$k_i = R_f + \beta_i(k_m - R_f)$$

$$k_i = R_f - \beta_i R_f + \beta_i k_m$$

$$k_i - \beta_i k_m = R_f(1 - \beta_i)$$

$$\boxed{R_f = \frac{k_i - \beta_i k_m}{1 - \beta_i}}$$

$$= \frac{0.1667 - 1.85 \times 0.12}{1 - 1.85}$$

$$= \frac{-0.0553}{-0.85} = 0.065$$

为了得到市场收益率 k_m：

$$k_i = R_f + \beta_i(k_m - R_f)$$

$$k_i = R_f + \beta_i k_m - \beta_i R_f$$

$$k_i + R_f(\beta_i - 1) = \beta_i k_m$$

$$\boxed{k_m = \frac{k_i + R_f(\beta_i - 1)}{\beta_i}}$$

$$= \frac{0.1667 + 0.065 \times (1.85 - 1)}{1.85} = 0.12$$

2.3　证券市场线

当我们画出资产定价公式图形时，将会得到一条以 β 为正斜率(上例中的 1.85)的直线．这条线被称为**证券市场线**(SML)．从例 2.2.1 中我们可以找到所有用于画出 SML 的要素．如同图 2-2 所示，由 β 衡量的风险水平在横轴上，必要收益率在纵轴上．无风险利

率 6.5%与 β 为 0 相对应．市场利率 12%与 β 为 1 相对应．k_i 收益率 16.67%与 β 为 1.85 相对应．竖线 BD 代表市场风险溢价(由 $BE-DE$ 得到，在公式中为 k_m-R_f)．所有 β 高于 1 的资产会有比市场风险溢价更高的风险溢价．β 为 1.85，其使得风险溢价比市场风险溢价更高，就如图中所绘的竖线 CE($CF-EF=16.67-6.5=10.17$)．类似地，所有 β 比 1 低的资产会有比市场风险溢价更低的风险溢价．例如，一公司 S 的 β 为 0.5，这家公司的风险溢价由 GH 表示(即 $GI-HI$)，并且其比市场风险溢价更低．

SML 的斜率代表风险厌恶程度．在经济中，一个越陡的 SML 代表一个更高的风险厌恶程度，一个越平坦的 SML 代表更低的风险厌恶程度．同时，SML 越陡，风险溢价更高，风险资产收益率更高，β 更高．

通货膨胀抬高 SML

一个无风险借款者的货币价格被认为是无风险收益率(R_f)．所以，就像其他价格一样，它也受通货膨胀的影响．事实上，模型包括一个嵌入式成分用于吸收通货膨胀的影响，这个成分被叫做**通货膨胀溢价**(IP)，其用于当价格上升时防止投资者的购买力下降．第二个成分是实际利率(k^0)，它不包含通货膨胀．

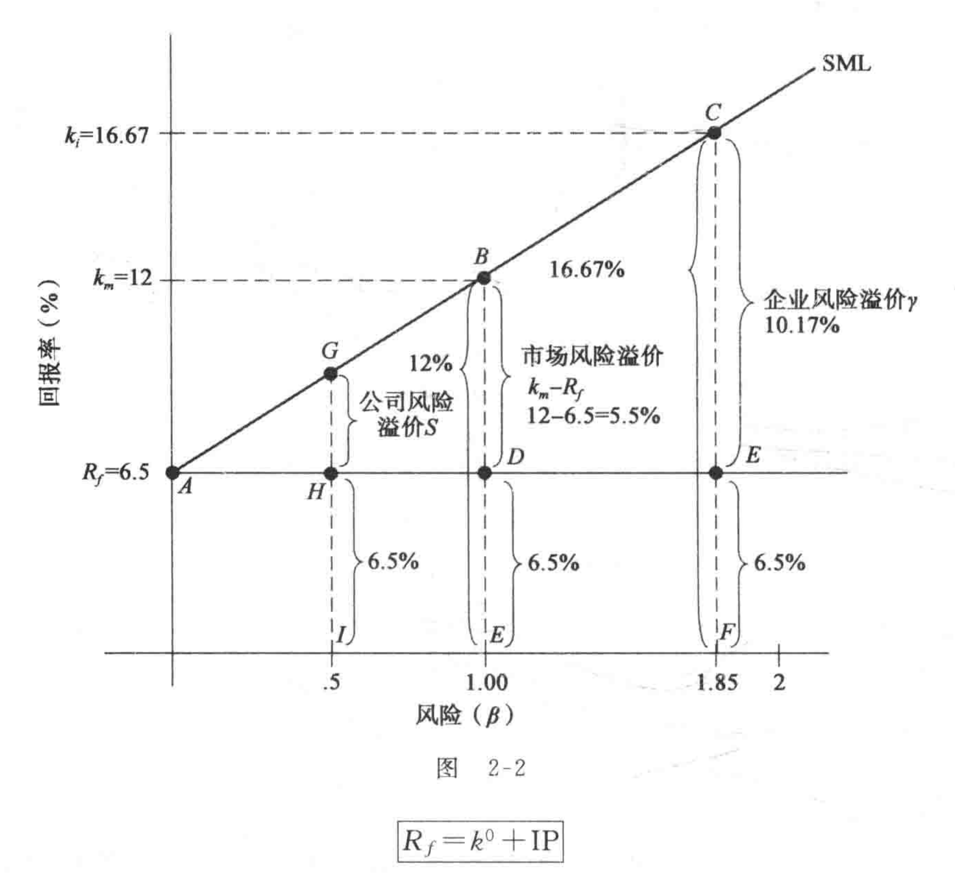


图　2-2

$$\boxed{R_f=k^0+\text{IP}}$$

让我们假设例 2.2.1 的无风险利率为 6.5%，它实际上是实际利率 k^0(2.5%)与通货膨胀溢价(4%)的结合．

既然 SML 从 R_f 点出发，那么任何通货膨胀的增加都会导致 IP 的增加以至于 R_f 的增加，并且它会导致 SML 从起点上升，将整条线抬起. 图 2-3 展示了 SML 如何上升到了更高的位置(SML_2)，如果通货膨胀从 4%到 5.5%，上涨 1.5 个百分点，则起点将从 8%开始.

$$R_f^1 = k^0 + IP_1 = 2.5 + 4 = 6.5$$
$$R_f^2 = k^0 + IP_2 = 2.5 + 5.5 = 8.00$$

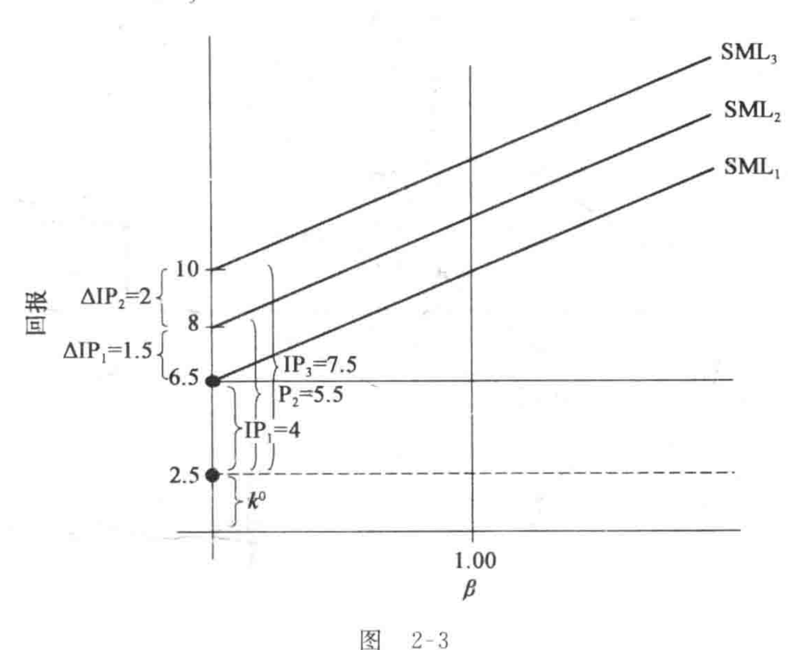


图 2-3

如果通货膨胀持续上升到 7.5%，则起点从 $R_f=10$ 开始，从 SML 上升到 SML_3.

$$R_f^3 = k^0 + IP_3 = 2.5 + 7.5 = 10.0$$

2.4 根据风险厌恶程度转动 SML

证券市场线的斜率展示了投资者风险厌恶程度的多少. 因此，SML 以向上、向下转动来显示投资者的风险厌恶的变化. 当斜率为 0，SML 将与无风险收益率(R_f)持平，即风险资产在达到无风险资产收益率时卖出，则在这一点无风险溢价. 当风险厌恶程度变大，风险溢价上涨，则 SML 会以 R_f 为中心转轴，它的另一端将开始根据风险溢价的多少上升. 从中心轴点来看，整条线将开始摆动. 图 2-4 展示了当风险厌恶程度上升时，市场风险溢价(MRP)将上升. 例如，当风险厌恶程度从 4%到 9%(竖线 FG 到 EG)，市场必要收益率(k_m)将从 10%到 15%(FK 到 EK)，并且 β 为 1.75 的风险资产收益率(k_i)将从 13%上升到 21.75%. 这个资产风险溢价(RAP)将从 7%到 15.75%(竖线 CB 到 DB).

$$k_i^1 = R_f + \beta_i(k_m^1 - R_f) = 0.06 + 1.75\times(0.10 - 0.06) = 0.06 + 0.07 = 0.13$$

其中

$$k_i^2 = R_f + \beta_i(k_m^2 - R_f) = 0.06 + 1.75\times(0.15 - 0.06) = 0.06 + 0.1575 = 0.2175$$

其中 $1.75\times(0.10-0.06)=7\%$ 和 $1.75\times(0.15-0.06)=15.75\%$ 是风险资产变动前后的风

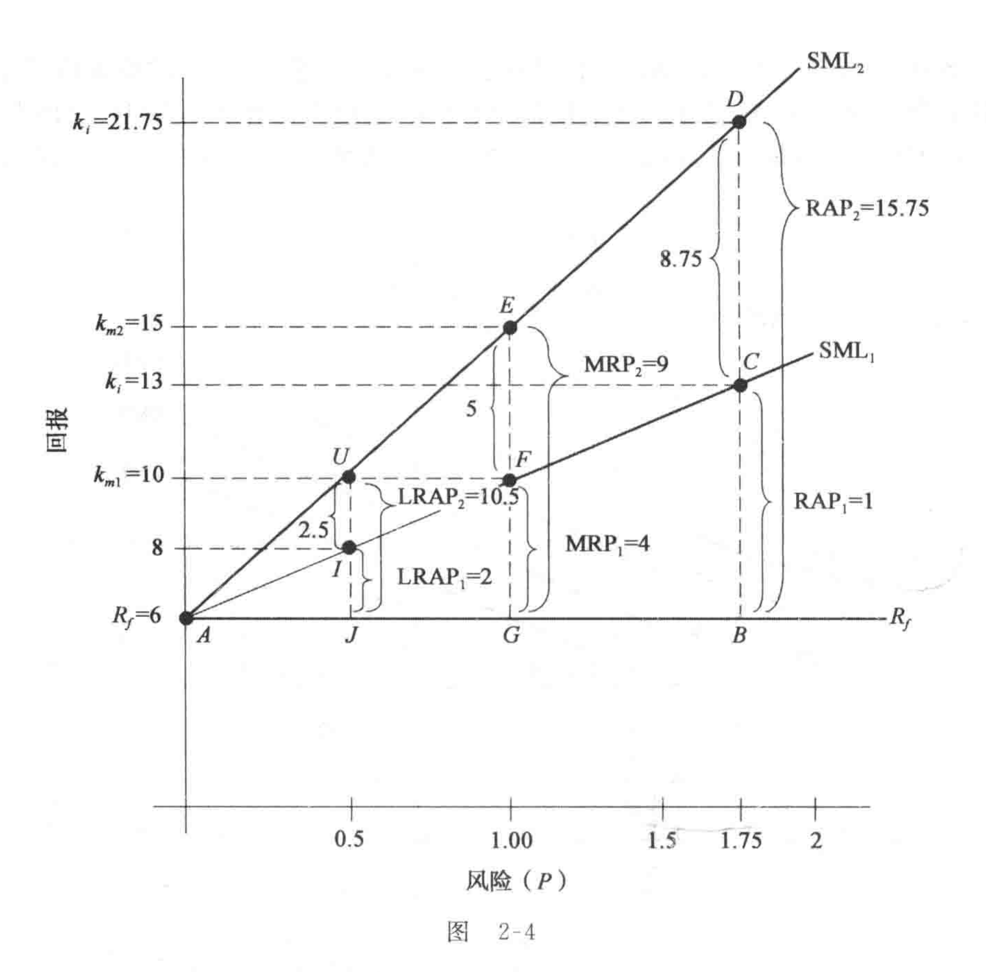


图 2-4

险溢价．这个变动导致了其斜率的变大使得它更为陡峭．SML_1 将会转动到 SML_2．很明显，与 β 低于 1 的低风险资产相比，风险厌恶程度的改变对于 β 更高的高风险资产影响更大．这可以从两种风险资产的必要收益率的改变看出．一种风险资产的 β 为 1.75，其必要收益率增加了 8.75％(从 13％到 21.75％)，而 β 为 0.5 的风险资产的必要收益率上涨了 2.5％(从 8％到 10.5％)．这就意味着一个 β 为 1.75 的风险资产面临着比 β 为 0.5 的风险资产高出 3.5 倍的必要收益率的增长．

关于 SML 的斜率还有一句话值得强调．看模型的方程可能会猜到 SML 的斜率并不等于 β：

$$k_i = R_f + \beta_i (k_m - R_f)$$

就如我们之前所看到的，β 与描述一特定资产收益反映市场收益变动的回归线的斜率相同．让我们考虑三种资产面对相同市场收益率变动做出的不同变动(见图 2-5)．假设在某点市场收益率是 8％，之后升高到 12％．这是一个 50％的上涨．同时假设三种资产 X、Y 和 Z 都有 8％的利率，那么它们会以以下方式对市场收益率变化做出变动：

- 资产 X：其收益率的增长与市场增长相同的百分点，都是 50％．从 8％到 12％．
- 资产 Y：其收益率上涨 100％．从 8％到 16％．
- 资产 Z：其收益率上涨 25％．从 8％到 10％．

资产 X 的直线以 45°穿过原点．其斜率为 1 表示资产收益与市场收益变动相同：

$$资产\ x\ 的斜率 = \frac{\Delta 资产回报}{\Delta 市场回报} = \frac{12-8}{12-8} = 1 = \beta$$

方程为

$$Y = a + b_x = 0 + 1(x)$$

$$\boxed{Y = x}$$

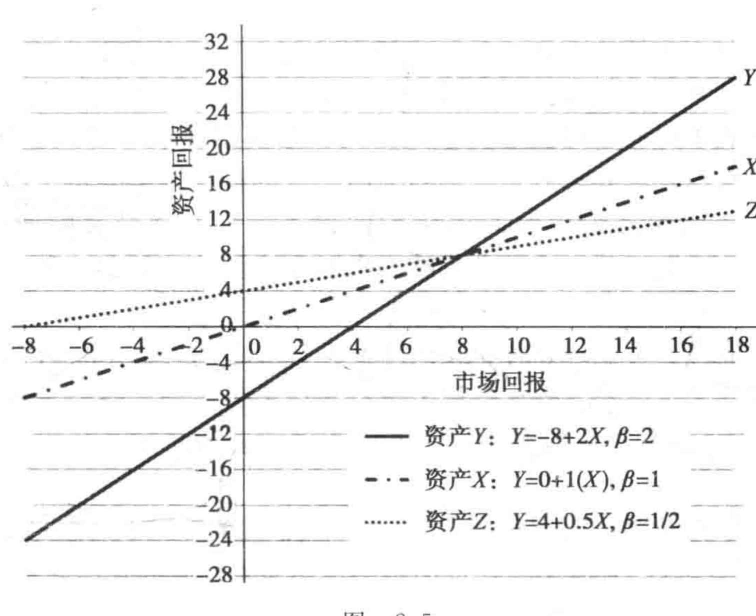


图　2-5

资产 Y 是以斜率为 2，x 轴的截距为 4，y 轴的截距为 −8 的一条直线．

$$资产\ y\ 的斜率 = \frac{16-8}{12-8} = \frac{8}{4} = 2$$

方程为

$$\boxed{Y = 8 + 2x}$$

资产 Z 是以斜率为 5，y 轴的截距为 4，x 轴的截距为 −8 的一条直线．

$$资产\ z\ 的斜率 = \frac{10-8}{12-8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

方程为

$$\boxed{Y = 4 + 0.5x}$$

既然所有回归线的方程都是线性的，β 可直接从公式中找到，因为它与如下形式的线性方程中的 b 相等．

$$\boxed{Y = a + bx}$$

单元七附录

小结

在这个单元中我们知道了金融证券的价格和稳定性的两个重要决定因素——风险和回报(也称收益)，并且知道它们如何互相影响．金融回报最直接的表达就是得到，然而风险通过回报的变动代表了损失的可能性，它就是大部分金融决策者都厌恶风险的基本原因．但是，接受更高风险的意愿和能力是与得到更高回报的潜力所联系的．我们回顾了预期回报率的概念，以及在风险是关于时间的函数假设下，用于衡量风险的两个主要统计变量——标准差和变异系数．其讨论是在风险厌恶和风险溢价之后的，然后是投资组合的回报和风险的细节．

在各类风险中值得强调的是只有相关风险是不可分散的，因为可分散的风险可通过资产多元化极大地消减甚至消除．本章解释了资本资产定价模型，并从理论和实践的角度强调了风险的衡量 β．证券市场线的概念也用文字和例证讲清楚了，其实它与通货膨胀和风险厌恶相关．

我们也对风险和回报理论的创始者表示敬意．这主要来源于马科维茨的两资产组合、资产多样化组合及其回报．它表明，积极的影响来源于不同方向移动的资产的补偿效应．

公式列表

预期回报率

$$k_e = \sum_{n=1}^{n} k_i \cdot \mathrm{Pr}_i$$

变异系数

$$\mathrm{Coef_v} = \frac{\sigma}{k_e}$$

投资组合回报

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} r_i w_i$$

投资组合预期回报率

$$k_p = \sum_{i=1}^{n} k_{ei} w_{ei}$$

β

$$\beta = \frac{\mathrm{Cov}(k_i, k_m)}{\mathrm{Var}(k_m)}$$

$$\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

单个证券回报和市场回报之间的协方差

$$\mathrm{Cov}(x, m) = \frac{\sum_{i=1}^{N} (k_i^x - k_e^x)(k_i^m - k_e^m)}{N}$$

市场方差

$$\mathrm{Var}(m) = \frac{\sum_{i=1}^{N} (k_i^m - k_e^m)^2}{N}$$

CAPM 方程

$$k_i = R_f + \beta_i (k_m - R_f)$$

CAPM β

$$\beta_i = \frac{k_i - R_f}{k_m - R_f}$$

CAPM 无风险利率

$$R_f = \frac{k_i - \beta_i k_m}{1 - \beta_i}$$

$$R_f = K^0 + \mathrm{IP}$$

CAPM 市场率

$$k_m = \frac{k_i + R_f(\beta_i - 1)}{\beta_i}$$

习题

1. 计算有下列可能回报的资产的预期回报：

资产	回报(%)	概率
1	$6\frac{3}{4}\%$	0.39
2	$8\frac{1}{4}\%$	0.27
3	$9\frac{1}{2}\%$	0.19
4	7%	0.09
5	4%	0.06

2. 如果比较练习 1 中的资产和下面资产，你能快速地说出哪一种资产风险更大吗？

资产	回报(%)	概率
1	9%	0.29
2	10%	0.25
3	$6\frac{1}{2}\%$	0.22
4	5%	0.15
5	4%	0.09

3. 如果这两种资产都在相同的组合中，对组合的回报来说是更好还是更坏？你能用一种快速的检查说出来吗？怎么做呢？
4. 计算练习 1 和 2 中两种资产的标准差，怎样用标准差解释哪种资产风险更大？
5. 计算练习 1 和 2 中两种资产的变异系数，哪种资产风险更大？为什么？
6. 计算如下五个资产的组合收益和如何组合.

资产	回报(%)	资产百分比(%)
A	14%	0.25
B	$13\frac{1}{2}\%$	0.20
C	12%	0.15
D	$9\frac{1}{4}\%$	0.26
E	10%	0.14

7. 计算一商业的组合收益，其市场价值从 2010 年的 720 000 美元上涨 2011 年的 985 000 美元.

8. 我们使用第一个资产的概率并结合练习 1，2，6 中的最后三个资产成为一个组合. 计算资产Ⅰ和Ⅱ的标准差、协方差和相关系数，并解释这两项资产组合所涉及的风险.

回报(%)			
资产Ⅰ	资产Ⅱ	资产Ⅲ	概率(%)
$6\frac{3}{4}$	9	14	0.39
$8\frac{1}{4}$	10	13	0.27
$9\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	12	0.19
7	5	$9\frac{1}{4}$	0.09
4	4	10	0.06

9. 计算资产Ⅱ和Ⅲ的标准差、方差、协方差和相关系数，并解释两资产的投资组合风险.
10. 计算资产Ⅰ和Ⅲ的标准差、方差、协方差和相关系数，并解释如果是这两个资产组合，风险会发生什么变化.
11. 使用第 8 题的信息来考虑公司 X 在三个阶段中三个资产的收益. 同时将这几个阶段的市场收益加到表格中. 计算在第一个阶段中 X 的 β.

公司 X 的回报(%)			
阶段 1	阶段 2	阶段 3	市场回报率(%)
$6\frac{3}{4}$	9	14	$5\frac{1}{2}$
$8\frac{1}{4}$	10	13	$6\frac{1}{4}$
$9\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	12	$6\frac{3}{4}$
7	5	$9\frac{1}{4}$	7
4	4	10	6

12. 计算公司 X 在阶段 2，3 的 β.
13. 假设当市场收益率为 8.5%，无风险利率为 5.25%时，A 公司的 β 为 1.97. 计算 A 公司的必要收益率.
14. 如果市场收益降到 7%，无风险利率降到 5%，13 题的 β 会是多少?
15. 现在如果 β 是 1.97，必要收益率是 13 题所算出的，但是市场利率降到 10%，那么无风险利率会是多少?
16. 如果保持 13 题的必要收益率，但是 β 降至 1.5，无风险利率升至 6%，市场收益率是多少?

单元八 Unit 8

保 险

第 1 章 生存年金

第 2 章 人寿保险

第 3 章 财产和意外保险

第1章 生存年金

生存年金有别于我们前面讨论过的一些年金．一个主要的区别就在于，生存年金与发生偶然事件的人寿保险有诸多联系．**或有合约**(contingent contract)涉及一系列的付款，那些款项依赖于某个难以预言事件的发生．在这种情况下，支付者要么因为未知事件发生而死亡，要么因为未知事件没有发生一直存活到一定年龄．这个不确定性的因素要求使用概率分布，在这种背景下的概率分布是一个死亡率表的形式．像人寿保险一样，生存年金由保险公司处置，并且支付年金的个人称为年金受益人，这与保险中称为"投保人"相反．在被保险人亡故后，人寿保险收益可支付给幸存亲友．

典型的生存年金和人寿保险的定期费用通常是总保费，其中除了净保费，还包括了负荷成本．**负荷成本**(loading cost)包含公司的运营支出和边际利润．净保费是最终年金受益人或投保人收益的单纯的成本，净保费除了在购买日被一次性交付外，通常以分期付款的方式支付．在一次性付款的情况下，它被称为**一次净保费**，而年度性分期付款则被称为**年净保费**．由于负荷成本随公司不同而不同，在这里我们的计算只关注净保费并不考虑负荷部分．这就是我们假设目前净保费的现值相当于未来所有收益的现值的原因．

1.1 死亡率表

死亡率表包含人们生存和死亡的统计数据，主要按年龄分类，有时也按性别分类．死亡率表的主要用途是计算"一个人能活多久"以及"他何时将有可能死亡"，可以用于估计生存年金和人寿保险的收益．美国的第一张死亡率表是1868年在纽约发表的，它被称作**美国死亡率样表**．我们在本书中使用的换算表(附录中的表10)是一个用于计算的样本表．它是根据美国国内收入署(IRS)的数据编制的．美国国内收入署的数据跨度有110年，而我们编制的表包括了从0至100岁的年龄段．以下是表中一些主要项目的定义：

x：一个人以年计算的年龄．零岁是1岁年龄以下100 000个婴儿的基本样本．

l_x：活在x年龄的人数．

d_x：在年龄x到年龄$x+1$之间死亡的人数．它可以用l_x和l_{x+1}之间的差计算．

$$\boxed{d_x = l_x - l_{x+1}}$$

例 1.1.1 20岁死亡的人数(d_{20})是118．它用20岁时活着的人数和21岁时活着的人数之间的差值来计算：

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

$$d_{20} = l_{20} - l_{21} = 97\ 741 - 97\ 623 = 118$$

l_{x+1}：任意年龄x之后一年在年龄组中活着的人数．它可以用在年龄x活着的人数(l_x)和在年龄x死亡的人数(d_x)之间的差来计算．

$$\boxed{l_{x+1} = l_x - d_x}$$

例 1.1.2　年龄 15 岁的 l_{x+1} 是 $l_{15+1}=l_{16}$. 它等于 98 129，计算如下：

$$l_{x+1}=l_x-d_x$$

$$l_{16}=l_{15}-d_{15}=98\ 196-67=98\ 129$$

q_x：一个人在 x 岁和 $x+1$ 岁之间死亡的概率. 这个概率称作**死亡率**，计算方式是用 x 岁和 $x+1$ 岁之间死亡的人数 d_x 除以在年龄组 x 活着的人数 l_x：

$$\boxed{q_x=\frac{d_x}{l_x}}$$

预先知道这一概率，我们就能够互相推导 d_x 和 l_x.

$$\boxed{d_x=q_xl_x}$$

和

$$\boxed{l_x=\frac{d_x}{q_x}}$$

例 1.1.3　30 岁的 q_x 是 0.001 316. 它的计算方法是

$$q_{30}=\frac{d_{30}}{l_{30}}=\frac{127}{96\ 477}=0.001\ 316$$

在一些表格中，这样的结果将被乘以 1000 来记，这类方法称为($1000q_x$)，即 1.316 (0.001 316 ×1000). 因此，我们可以应用第二个公式计算 d_x 和 l_x：

$$d_{30}=q_{30}\cdot l_{30}=0.001\ 316\times 96\ 477=127$$

以及

$$l_{30}=\frac{d_{30}}{q_{30}}=\frac{127}{0.001\ 316}=96\ 477$$

由于 q_x 是死亡的概率，所以我们还可以计算在任意点 x 多活一年的概率. 这是一个 x 岁的人活到 $x+1$ 岁的可能性. 它由 p_x 表示，计算如下：

$$\boxed{p_x=\frac{l_{x+1}}{l_x}}$$

例 1.1.4　一个 30 岁的人多活一年的概率接近 100%：

$$p_{30}=\frac{l_{31}}{l_{30}}=\frac{96\ 350}{96\ 477}=0.998\ 684$$

这是 q_{30} 即 0.001 316 的补. p_x 与 q_x 之间的互补关系只是意味着一个人要么活着，要么死亡，两种可能性必具其一：

$$\boxed{q_x+p_x=1}$$

$$q_{30}+p_{30}=0.001\ 316+0.998\ 684=1$$

这给出了 p_x 与 q_x 的另一个计算公式：

$$p_x=1-q_x$$

和

$$q_x=1-p_x$$

最后的公式是前面 q_x 公式的证明：

$$q_x = 1 - p_x$$

$$q_x = \frac{1 - l_{x+1}}{l_x}$$

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

由于 $l_{x+1} = l_x - d_x$，那么

$$q_x = \frac{l_x - l_x + d_x}{l_x}$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

现在，我们可以得到一个 x 岁的人活到 $x+1$ 岁的概率 p_x：

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

由相同的逻辑，如果 n 是年数，我们可以说一个 x 岁的人活到 n 年的概率将是

$$\boxed{{}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}}$$

例 1.1.5　如果想要知道一个 50 岁的人活到 70 岁的概率有多大，那么 n 就为 20 年，此概率可以如下计算：

$${}_{20}p_{50} = \frac{l_{50+20}}{l_{50}} = \frac{l_{70}}{l_{50}} = \frac{68\ 248}{91\ 526} = 74.6\%$$

由于 p_x 与 q_x 之间互补，我们可以得出这样的结论：

$${}_np_x + {}_nq_x = 1$$

$${}_nq_x = 1 - {}_np_x$$

$${}_nq_x = \frac{1 - l_{x+n}}{l_x}$$

$$\boxed{{}_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}}$$

它被定义为一个年龄 x 岁的人将在 n 年内或在 $x+n$ 岁死去的概率.

例 1.1.6　一个年龄 50 岁的人在未来 20 年内死亡的概率是多少？

这里，n 也是 20，因此死亡概率可以如下计算：

$${}_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

$${}_{20}q_{50} = \frac{l_{50} - l_{50+20}}{l_{50}} = \frac{l_{50} - l_{70}}{l_{50}}$$

$$= \frac{91\ 526 - 68\ 248}{91\ 526} = 25.4\%$$

我们可以检证：

$$n p_x + n q_x = 1$$

$$_{20}p_{50} + _{20}q_{50} = 1$$

$$0.746 + 0.254 = 1$$

1.2 赔偿条款

死亡率表还包括其他一些项目(D_x、N_x、C_x 和 M_x)，用于生存年金和人寿保险的计算.

D_x：支付给年龄在 x 岁活着的每个人 1.00 美元的现值. 对每个年龄组，即用年龄组 x 的人数乘以 1 美元现值(v^x)或$\frac{1}{(1+r)^x}$来计算：

$$\boxed{D_x = l_x \cdot v^x}$$

$$\boxed{D_x = \frac{l_x}{(1+r)^x}}$$

请注意我们的死亡率表基于 5%的利率.

例 1.2.1 在表 10 中，一个年龄 40 岁人的 D_x 值是 13 483.83 美元. 这个值通过如下计算得到：

$$D_x = l_x \cdot v^x$$

$$D_{40} = l_{40} \cdot v^{40} = 94\ 926\left[\frac{1}{(1+0.05)^{40}}\right] = 13\ 483.83$$

我们还可以从 v^n 表中获得 v^x 的值，它正好是 0.142 045 68.

$$D_{40} = 94\ 926(0.142\ 045\ 68) = 13\ 483.83$$

N_x：为从 x 岁活到表尾 100 岁的每个年龄组的所有人支付年金的现值，所以可以视为上述 D_x 的总和.

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{x+100}$$

$$\boxed{N_x = \sum_{k=x}^{x+100} D_k}$$

例 1.2.2 假设 70 岁人群中每个人的年金都是每年 500 美元，那么这些年金贴现到 0 岁的现值计算方法是用年金乘以表中的 N_{70} 值：

$$500N_{70} = 500(21\ 427.28) = 10\ 713\ 640$$

C_x：在 x 岁去世的人留给受益人的付款 1 美元的现值. 计算方法是用在 x 岁去世的人数(d_x)乘以 $x+1$ 时刻 1 美元的现值.

$$\boxed{C_x = d_x \cdot v^{x+1}}$$

例 1.2.3 在表 10 中 55 岁的 C_x 值是 51.86. 计算方法如下：

$$C_{55} = d_{55} v^{55+1} = d^{55} v^{56} = 797\left[\frac{1}{(1+0.05)^{56}}\right] = 51.86$$

使用从 v^n 表中获得的 v^{56} 表值会得到相同的结果：

$$C_{55} = 797(9.065\,072\,76) = 51.86$$

M_x：所有 C_x 的总和．它表示的是最终死亡但在 x 岁还活着的所有人支付 1.00 美元的现值．它类似于 N_x，是从年龄 x 岁到年龄 0 岁贴现的累积现值．

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+3} + \cdots + C_{x+100}$$

$$\boxed{M_x = \sum_{k=x}^{x+100} C_k}$$

例 1.2.4 如果为每个 85 岁年龄组去世的人付款 1000 美元，所有向 0 岁折现的累积现值将是

$$1000(329.76) = 329\,760$$

这里在表 10 中 M_{85} 是 329.76.

L. E.：每个年龄组的预期寿命.

1.3 生存保险

生存保险(pure endowment)是由当时活着的人在某个未来时间收到的一次性付款．由于这种付款在将来某个时候才收到，我们应该关心它的现值．这就是它相当于支付的贴现值的原因．如果我们假定 nE_x 是每个 x 年龄的人 n 年 1.00 美元的贡献，保费总额是贡献金额乘以年龄在 x 岁活着的人的数目($l_x \cdot nE_x$)，因为它将在年龄 $x+n$ 收到(图 1-1)，如果把它贴现到年龄 x，我们得到

$$l_x \cdot nE_x = \frac{l_{x+n}}{(1+r)^n}$$

$$nE_x = \frac{\left[\dfrac{l_{x+n}}{(1+r)^n}\right]}{l_x}$$

$$nE_x = \frac{l_{x+n}\left[\dfrac{1}{(1+r)^n}\right]}{l_x}$$

$$nE_x = \frac{l_{x+n} \cdot v^n}{l_x}$$

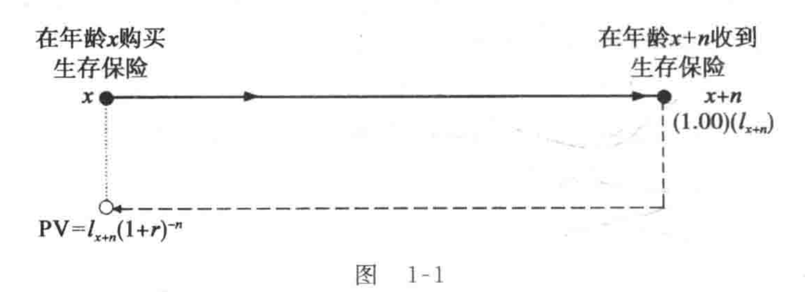


图 1-1

这是对 1.00 美元所做的假设．对任何其他实际金额 P，现值将是

$$\boxed{{}_nE_x = P\left(\frac{l_{x+n}}{l_x}\right)v^n}$$

为了更加简便，我们可以使用换算值：

$$ {}_nE_x = \frac{l_{x+n} \cdot v^n \cdot v^x}{l_x \cdot v^x} = \frac{l_{x+n} \cdot v^{x+n}}{l_x \cdot v^x}$$

那么

$$ {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

对付款 P

$$\boxed{{}_nE_x = P\left(\frac{D_{x+n}}{D_x}\right)}$$

例 1.3.1 Glenn 现在 55 岁．他希望在 65 岁退休时收到 50 000 美元的生存保险．如果利率是 5%，他现在需要支付多少？

购买和收到生存保险之间的时间是 $n=10$.

$$\begin{aligned} {}_nE_x &= P\left(\frac{l_{x+n}}{l_x}\right)v^n \\ {}_{10}E_{55} &= 50\,000\left(\frac{l_{55+10}}{l_{55}}\right)v^{10} \\ &= 50\,000\left(\frac{77\,107}{88\,348}\right)(0.613\,913\,25) \\ &= 26\,790 \end{aligned}$$

并且，我们还可以使用换算公式：

$$\begin{aligned} {}_nE_x &= P\left(\frac{D_{x+n}}{D_x}\right) \\ {}_{10}E_{55} &= 50\,000\left(\frac{D_{65}}{D_{55}}\right) \\ &= 50\,000\left(\frac{3234.37}{6036.50}\right) \\ &= 26\,790 \end{aligned}$$

1.4 生存年金的种类

这里讨论的生存年金称为**单一生存年金**，其鲜明的特点是为单一活着的人而设计，当这个人死亡时它也随之终止．有两种主要的类型，分别是终身生存年金和临时生存年金．

终身生存年金

只要享受年金的人活着，终身生存年金就要不停给付，直到享受年金的人死亡．这些年金分为三类：普通年金、按期支付年金和延期支付年金．

普通终身生存年金

这种类型的年金也称为即期终身生存年金，是以年金受益人活着的每一年年底收到支

付为特征的. 我们可以把这些付款看作一系列的个人生存保险，正因为这种理由，我们把 a 考虑为年龄组 x 中每个人每年 1.00 美元的现值. 累积的保险将是

$$a_x = 1E_x + 2E_x + 3E_x + \cdots + 100E$$

$$a_x = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \cdots + \frac{D_{x+100}}{D_x}$$

$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \cdots + D_{x+100}}{D_x}$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

如果支付款为 P 而不是 1.00 美元，则

$$\boxed{a_x = P\left(\frac{N_{x+1}}{D_x}\right)}$$

例 1.4.1 Nicole 现在 45 岁，她想买终身生存年金，该年金将在她余生每年年底支付她 2000 美元. 为此该年金费将是多少?

因为付款都在每年年底，我们立即知道这是普通终身生存年金.

$$a_x = P\left(\frac{N_{x+1}}{D_x}\right)$$

$$a_{45} = 2000\left(\frac{N_{46}}{D_{45}}\right) = 2000\left(\frac{154\ 684.29}{10\ 417.24}\right) = 29\ 697.75$$

按期支付终身生存年金

除了首次付款发生在购买时刻，而且继续付款发生在年金受益人余生的每年同一时间之外，这类年金与终身生存年金是相同的. 因为在 1.00 美元支付的基础上标示公式，而且已经提到这个年金早一年首次付款，我们能够得出结论：按期支付终身生存年金($\ddot{a}_x$)不同于普通终身生存年金(a_x).

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x$$

$$\ddot{a}_x = 1 + \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{D_x + N_{x+1}}{D_x}$$

由于 $N_{x+1} = D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{x+100}$，所以

$$\ddot{a}_x = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{x+100}}{D_x}$$

分子是 N_x：

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

用付款额 P 替换 1.00 美元，我们得到按期支付终身生存年金公式：

$$\boxed{\ddot{a}_x = P\left(\frac{N_x}{D_x}\right)}$$

例 1.4.2 假设例 1.4.1 中 Nicole 想在购买时刻获取她的首次付款权. 这将会影响她每年获得的金额吗?

这种变化将使年金变为按期支付年金, 因此

$$\ddot{a}_{45}=P\left(\frac{N_x}{D_x}\right)=2000\left(\frac{165\ 101.53}{10\ 417.24}\right)=31\ 697.75$$

于是, 付款增加了很多! 但是增加了多少? 增加了

$$31\ 697.76-29\ 697.75=2000$$

而且, 那恰好就是普通终身生存年金和按期支付终身生存年金的支付差额.

例 1.4.3 一名 62 岁被车撞到的女子收到一份保险理赔, 她想把它放入一个终身生存年金中, 以便每年 12 000 美元的付款能立即开始生效, 并在她余生里每年的同一时间继续支付. 她的结算应该是多少?

$$\ddot{a}_x=P\left(\frac{N_x}{D_x}\right)$$

$$\ddot{a}_{62}=P\left(\frac{N_{62}}{D_{62}}\right)=12\ 000\left(\frac{46\ 632.42}{3950.12}\right)=12\ 000(11.81)=141\ 720$$

延期支付终身生存年金

这是首期付款推迟到超过购买之日一年以上 n 期的年金. 由于购买发生在年龄 x, 所以延迟期限将是 $x+n$, 是从购买当天开始的按期交付年金. 它也可以是 $x+1+n$ 的普通年金, 即在购买日期之后 1 年从 $x+1$ 开始(见图 1-2).

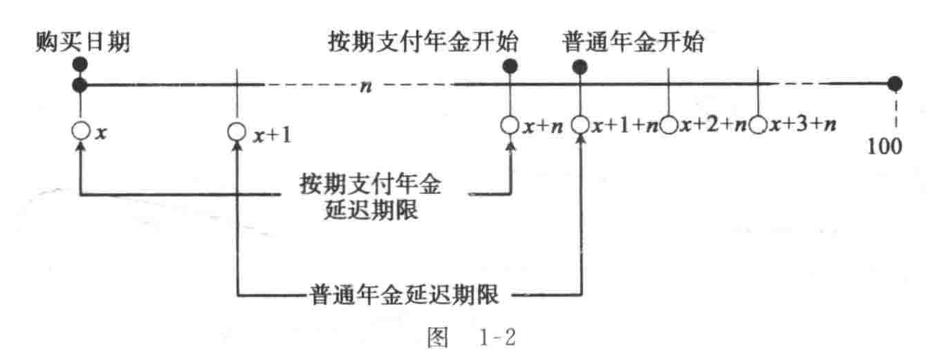


图 1-2

延期普通终身年金的现值将是$n|a_x$, 由下式得到:

$$n|a_x=(n+1E_x)+(n+2E_x)+(n+3E_x)+\cdots+(n+100E_x)$$

$$n|a_x=\frac{D_{x+1+n}+D_{x+2+n}+D_{x+3+n}+\cdots+D_{x+100+n}}{D_x}$$

$$n|a_x=\frac{N_{x+1+n}}{D_x}$$

而且对支付 P:

$$\boxed{n|a_x=P\left(\frac{N_{x+1+n}}{D_x}\right)}$$

以相同的方式，我们可以获得延期终身生存年金应付款($n|\ddot{a}_x$)：

$$n|\ddot{a}_x = nE_x + (n+1E_x) + (n+2E_x) + \cdots + (n+100E_x)$$

$$n|\ddot{a}_x = \frac{D_{x+n} + D_{x+n+n} + D_{x+2+n} + \cdots + D_{x+100+n}}{D_x}$$

$$n|\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

对支付款 P 将是

$$\boxed{n|\ddot{a}_x = P\left(\frac{N_{x+n}}{D_x}\right)}$$

例 1.4.4 25 岁的 Linda 希望购买一年支付 2400 美元的普通终身生存年金，但她想要在 25 年后开始收到付款. 她要付多少年金?

$$n|a_x = P\left(\frac{N_{x+1+n}}{D_x}\right)$$

$$25|a_{25} = P\left(\frac{N_{25+1+25}}{D_{25}}\right) = 2400\left(\frac{N_{51}}{D_{25}}\right) = 2400\left(\frac{110\ 125.43}{28\ 676.85}\right) = 9216.53$$

例 1.4.5 一个 27 岁的人购买一项按期支付终身生存年金，以便在他 65 岁的时候每年能收到 10 000 美元. 他的净保费是多少?

$$n|\ddot{a}_x = P\left(\frac{N_{x+n}}{D_x}\right)$$

$$38|\ddot{a}_{27} = 10\ 000\left(\frac{N_{65}}{D_{27}}\right)$$

$$38|\ddot{a}_{27} = 10\ 000\left(\frac{35\ 523.27}{25\ 942.72}\right) = 13\ 692$$

例 1.4.6 一份 65 000 美元的遗产给一个 12 岁的女孩. 她的监护人决定给她买一份终身生存年金，当她满 18 岁时开始每年支付. 她每年将会收到多少钱?

一次性净保费是 65 000 美元，并且 $n=6$.

$$65\ 000 = P\left(\frac{N_{18}}{D_{12}}\right) = P\left(\frac{782\ 546.42}{54\ 742.13}\right) = P(14.30)$$

$$P = \frac{65\ 000}{14.30} = 4547$$

临时生存年金

终身生存年金为年金受益人的余生支付年金，而临时生存年金只支付一段确定的合同期限，在整个合同期间年金受益人还要活着. 当该人去世后，就停止付款. 根据第一次付款的日期，临时生存年金分为普通支付、按期支付和延期支付三种.

普通临时生存年金

如果年金的期限是 n，临时生存年金的现值($a_{x:\overline{n}|}$)可以是普通终身生存年金(a_x)和延

期支付终身生存年金($n|a_x$)之间的差：

$$a_{x:\overline{n}|} = a_x - n|a_x$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{N_{x+1+n}}{D_x}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+1+n}}{D_x}$$

对支付款 P 是

$$\boxed{a_{x:\overline{n}|} = P\left(\frac{N_{x+1} - N_{x+1+n}}{D_x}\right)}$$

按期支付临时生存年金

普通的临时生存年金是在每年年底付款. 但是，如果在每年年初付款，年金将被认为是按期支付临时生存年金($\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$)，可以用按期支付终身生存年金($\ddot{a}_x$)和延期支付年金($n|\ddot{a}_x$)之间的差计算：

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_x - n|\ddot{a}_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

对支付款 P 是

$$\boxed{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = P\left(\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}\right)}$$

例 1.4.7 一个 33 岁的人想要买一份普通生存年金，该年金每年将支付他 3600 美元，并且将支付 10 年. 他的一次净保费是多少?

因为有 10 年要求，它是一种普通的临时年金.

$$a_{x:\overline{n}|} = P\left(\frac{N_{x+1} - N_{x+1+n}}{D_x}\right)$$

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{33:\overline{10}|} &= 3600\left(\frac{N_{33+1} - N_{33+1+10}}{D_{33}}\right)\\ &= 3600\left(\frac{N_{34} - N_{44}}{D_{33}}\right)\\ &= 3600\left(\frac{323\ 068.92 - 176\ 076.33}{19\ 205.35}\right)\\ &= 27\ 553.43\end{aligned}$$

例 1.4.8 如果年金受益人请求在年初付款，求例 1.4.7 中年金的净现值.

这项要求使得年金成为按期支付临时年金：

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = P\left(\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}\right)$$

$$\ddot{a}_{33:\overline{10}|} = 3600\left(\frac{N_{33} - N_{43}}{D_{33}}\right)$$
$$= 3600\left(\frac{342\ 274.28 - 187\ 635.20}{19\ 205.35}\right)$$
$$= 28\ 986.75$$

抑制按期支付临时生存年金

有时候，临时生存年金的受益人选择不以现金支付，允许它们累积一段时间(n)，并且成为生存保险. 在这种情况下，年金受益人抑制领取年金，叫作**抑制临时生存年金**(nF_x)，计算如下：

$$nF_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}}$$

对支付款 P 是

$$\boxed{nF_x = P\left(\frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}}\right)}$$

例 1.4.9　Nicole 今年年初就 50 岁了，会收到 3000 美元临时生存年金付款，一直持续到他 60 岁. Nicole 决定把钱留在保险公司再积累 10 年. 当他 60 岁的时候，他将得到多少钱?

$$nF_x = P\left(\frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}}\right)$$
$$10F_{50} = 3000\left(\frac{N_{50} - N_{60}}{D_{60}}\right)$$
$$= 3000\left(\frac{118\ 106.84 - 55\ 329.23}{4482.32}\right)$$
$$= 42\ 016.82$$

延期支付临时生存年金

这是最后一种临时生存年金. 此年金付款将自年金购买当天起经过一段时间 (k)才会启动，k 通常超过一年. 延期支付临时生存年金和按期支付年金非常类似，其现值($k|\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$)的计算方法是

$$k|\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x}$$

其中 k 是延迟周期，x 是年金受益人年龄，n 是年金时间. 对支付 P ，一次净保费或者临时生存年金现值将是

$$\boxed{k|\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = P\left(\frac{N_{n+k} - N_{x+k+n}}{D_k}\right)}$$

例 1.4.10　一笔临时生存年金持续 12 年，其每年支付 2500 美元给一个 15 岁的男孩. 此年金要求受益人直至满 18 岁时才能开始接受年度付款. 求该临时生存年金的一次净

保费.

这里，x 是 15，k 是 3(即 18－15)，并且 n 是 12.

$$k|\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = P\left(\frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x}\right)$$

$$3|\ddot{a}_{15:\overline{12|}} = 2500\left(\frac{N_{18} - N_{30}}{D_{15}}\right)$$

$$= 2500\left(\frac{782\ 546.43 - 406\ 021.84}{47\ 233.95}\right)$$

$$= 19\ 928.70$$

第2章 人寿保险

生存年金和人寿保险的根本区别是，生存年金支付给在世的年金受益人，而人寿保险则支付给被保险的幸存者直到其死亡．因此，人寿保单规定支付任何收益之前被保险人死亡．被保险人要么一次性支付保费，要么在购买人寿保单时支付年保费．被保险人或保单持有者的年龄将由购买时刻的年龄确定．特别地，她的年龄是最接近的生日到下年起计算的正式保单日期．与生存年金一样，我们的计算跳过了运营费和通常加进来的贷款．我们只考虑了净保费的价值，即保单面额的现值．因此，把一次性净保费分解为每年分期付款，所有保费的现值将等于一次性净保费．

人寿保单有三种主要类型：终身人寿保单、定期人寿保单和养老保单．

2.1 终身人寿保单

根据终身人寿保单，无论何时保单持有人发生事故，保险公司都有义务给存活的保单持有人支付保单面值，直到投保人死亡．保单收益通常在被保险人死亡发生当年年末支付．与年金一样，我们基于1.00美元的现值来构建公式，这样我们就可以用它乘以问题中的面值．保单的一次性净保费（A_x）是付给保单受益者的面值的数学期望的总和．数学期望是被保险人死亡的概率(q_x)和保单收益现值（v^n）的乘积：

$$A_x = q_x v^1 + q_{x+1} v^2 + q_{x+2} v^3 + \cdots$$

$$A_x = \left(\frac{d_x}{l_x}\right)v^1 + \left(\frac{d_{x+1}}{l_x}\right)v^2 + \left(\frac{d_{x+2}}{l_x}\right)v^3 + \cdots$$

分子和分母同乘以 v^x，得到

$$A_x = \frac{d_x v^{x+1}}{l_x v^x} + \frac{d_{x+1} v^{x+2}}{l_x v^x} + \frac{d_{x+2} v^{x+3}}{l_x v^x} + \cdots$$

$$A_x = \frac{d_x v^{x+1} + d_{x+1} v^{x+2} + d_{x+2} v^{x+3} + \cdots}{l_x v^x}$$

因为 $d_x v^{x+1} = C_x$ 和 $l_x v^x = D_x$，所以

$$A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots}{D_x}$$

并且，因为 $M_x = \sum C_k$，所以

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

对于某种保单的面值（F），一次性净保费(有时称为保险的成本)将为

$$\boxed{A_x = F\left(\frac{M_x}{D_x}\right)}$$

例 2.1.1 Tim 49 岁，想要他的家人在他死后获得 200 000 美元，那么终身人寿保

单的一次性净保费是多少？

$$A_x = F\left(\frac{M_x}{D_x}\right)$$

$$A_{49} = 200\ 000\left(\frac{M_{49}}{D_{49}}\right) = 200\ 000\left(\frac{2400.44}{8425.80}\right) = 56\ 978.33$$

2.2 年保费：终身的基础

像上面的例子一样，当即支付 56 978.33 美元对大多数人来说是困难的. 这就是为什么公司把这种一次性保费分解为由保险人支付直到死亡的年保费. 在这种情形，大量的支付导致了一项期初给付终身年金($\ddot{a}_x$). 要计算终身人寿保单每年的保费(P_x)，我们设置如下：

$$A_x = P_x \ddot{a}_x$$

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{M_x / D_x}{N_x / D_x}$$

$$P_x = \frac{M_x}{D_x} \cdot \frac{D_x}{N_x}$$

$$P_x = \frac{M_x}{N_x}$$

而且，对于面值 F：

$$\boxed{P_x = F\left(\frac{M_x}{N_x}\right)}$$

例 2.2.1 例 2.1.1 中，由于 Tim 不能一次性支付全部的净保费，计算 Tim 每年要支付的保费数额.

$$P_x = F\left(\frac{M_x}{N_x}\right)$$

$$P_{49} = 200\ 000\left(\frac{M_{49}}{N_{49}}\right) = \frac{2400.44}{126\ 532.64}$$

$$= 2000\ 000\left(\frac{2400.44}{126\ 532.64}\right)$$

$$= 3794.18$$

一张 200 000 美元终身人寿保单的年保费为 3794.18 美元.

2.3 年保费：m 次支付的基础

如果被保险人想把保费次数限制为一个特定数，而不是持续支付保费直到他死亡，也可以与保险公司协商. 如果我们考虑净保费支付的年数为 m，就会形成一种按期支付临时终身年金($\ddot{a}_{x:\overline{m}|}$)，年保费($mP_x$)将如下得到：

$$A_x = mP_x \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

$$mP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$$

$$mP_x = \frac{M_x / D_x}{(N_x - N_{x+m}) / D_x}$$

$$mP_x = \frac{M_x}{D_x} \cdot \frac{D_x}{N_x - N_{x+m}}$$

消去 D_x：

$$mP_x = \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}}$$

对面值 F，公式将是

$$\boxed{mP_x = F\left(\frac{M_x}{N_x - N_{x+m}}\right)}$$

例 2.3.1 假设在前面的例子中 Tim 想要在 10 年内支付他所有的净保费. 他每年将支付多少?

$$\begin{aligned} mP_x &= F\left(\frac{M_x}{N_x - N_{x+m}}\right) \\ 10P_{49} &= 200\ 000\left(\frac{M_{49}}{N_{49} - N_{49+10}}\right) \\ &= 200\ 000\left(\frac{2400.44}{126\ 532.64 - 60\ 095.41}\right) \\ &= 7226.19 \end{aligned}$$

如果保险的总成本仅仅支付 10 年，这就是每年的保费，称之为 10 年支付的保费.

2.4 递延终身人寿保单

递延终身人寿保单基于投保人直到某个特定时期(n)才会去世的概念，这个特定时期称为延迟期. 这张保单对应 1 美元的一次性净保费用$n|A_x$ 表示，由下式确定：

$$n|A_x = \frac{d_{x+n} \cdot v^{n+1}}{l_x} + \frac{d_{x+n+1} \cdot v^{n+2}}{l_x} + \frac{d_{x+n+2} \cdot v^{n+3}}{l_x} + \cdots$$

$$n|A_x = \frac{d_{x+n} \cdot v^{n+1} + d_{x+n+1} \cdot v^{n+2} + d_{x+n+2} \cdot v^{n+3} + \cdots}{l_x}$$

乘以 v^x，我们得到

$$n|A_x = \frac{d_{x+n} \cdot v^{x+n+1} + d_{x+n+1} \cdot v^{x+n+2} + d_{x+n+2} \cdot v^{x+n+3} + \cdots}{l_x \cdot v^x}$$

$$n|A_x = \frac{C_{x+n} + C_{x+n+1} + C_{x+n+2} + \cdots}{D_x}$$

$$n|A_x = \frac{M_{x+n}}{D_x}$$

对面值 F，将是

$$\boxed{n|A_x = F\left(\frac{M_{x+n}}{D_x}\right)}$$

例 2.4.1 Rita 35 岁. 她想买一份 30 000 美元的人寿保单，如果她在 40 岁或 40 岁

以后死亡，该保单才会被激活．她的一次性净保费将是多少？

延迟期(n)是 5 年．

$$n|A_x = F\left(\frac{M_{x+n}}{D_x}\right)$$

$$5|A_{35} = 30\ 000\left(\frac{M_{35+5}}{D_{35}}\right) = 30\ 000\left(\frac{2717.07}{17\ 369.06}\right) = 4692.95$$

2.5 递延年保费：终身的基础

我们还可以根据年保费($n|P_x$)计算保单的费用，涉及由保费构成的期初年金：

$$n|A_x = n|P_x \cdot \ddot{a}_x$$

$$n|P_x = \frac{n|A_x}{\ddot{a}_x}$$

$$n|P_x = \frac{M_{x+n}/D_x}{N_x/D_x}$$

$$n|P_x = \frac{M_{x+n}}{D_x}\left(\frac{D_x}{N_x}\right)$$

消去 D_x：

$$n|P_x = \frac{M_{x+n}}{N_x}$$

对面值 F，将会是

$$\boxed{n|P_x = F\left(\frac{M_{x+n}}{N_x}\right)}$$

例 2.5.1　假设 Rita 想要将保费分解为每年支付．每次付款将是多少？

$$n|P_x = F\left(\frac{M_{x+n}}{N_x}\right)$$

$$5|P_{35} = 30\ 000\left(\frac{M_{35+5}}{N_{35}}\right) = 30\ 000\left(\frac{2717.07}{304\ 804.19}\right) = 267.42$$

2.6 递延年保费：m 次支付的基础

保单的一次性净保费同样可以分解为每年支付的特定次数，对应 m 个时期，这期间保单持有人必须存活．假设基于 m 年的每年保费是 $P(n|A_x)$，计算如下：

$$n|A_x = mP(n|A_x =) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{m|}}$$

$$mP(n|A_x) = \frac{n|A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}}$$

$$mP(n|A_x) = \frac{M_{x+n}/D_x}{(N_x - N_{x+m})/D_x}$$

$$mP(n|A_x) = \frac{M_{x+n}}{D_x}\left(\frac{D_x}{N_x - N_{x+m}}\right)$$

消去 D_x：

$$mP(n|A_x) = \frac{M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

面值 F 将是

$$\boxed{mP(n|A_x) = F\left(\frac{M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}\right)}$$

例 2.6.1 假设 Rita 想在 4 年内支付她的净保费. 每年的保费将是多少?

$$mP(n|A_x) = F\left(\frac{M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}\right)$$

$$\begin{aligned} 4P(5|A_{35}) &= 30\ 000\left(\frac{M_{35+5}}{N_{35} - N_{35+4}}\right) \\ &= 30\ 000\left(\frac{2717.07}{304\ 804.19 - 240\ 290.14}\right) \\ &= 1263.48 \end{aligned}$$

假如 Rita 这四年还活着，她要以这个年缴费额在 4 年支付所有的保单成本.

2.7 定期人寿保单

只有当受保人在一个特定的称为保期(n)的时期内亡故时，定期人寿保单才支付保单面额给幸存者. 从技术上讲，这张保单的一次性净保费($A^1_{x:\overline{n|}}$)被看作终身人寿保险的费用(A_x)和递延终身人寿保险的费用($n|A_x$)之差.

$$A^1_{x:\overline{n|}} = A_x - n|A_x$$

$$A^1_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x}{D_x} - \frac{M_{x+n}}{D_x}$$

$$A^1_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

面值 F 是

$$\boxed{A^1_{x:\overline{n|}} = F\left(\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}\right)}$$

例 2.7.1 Alison 57 岁，她想购买一份 50 000 美元 13 年期限的定期人寿保单，她将花费多少钱?

$$A^1_{x:\overline{n|}} = F\left(\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}\right)$$

$$\begin{aligned} A^1_{57:\overline{13|}} &= 50\ 000\left(\frac{M_{57} - M_{57+13}}{D_{57}}\right) \\ &= 50\ 000\left(\frac{2014.22 - 1222.70}{5372.84}\right) = 7365.94 \end{aligned}$$

定期保单通常按年支付，这里支付次数(k)应该小于或等于保单期限(n).

$$\boxed{k \leqslant n}$$

年保费是 $kP^1_{x:\overline{n}|}$，计算如下：

$$A^1_{x:\overline{n}|}=kP^1_{x:\overline{n}|}\times\ddot{a}_{x:\overline{k}|}$$

$$kP^1_{x:\overline{n}|}=\frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

$$kP^1_{x:\overline{n}|}=\frac{(M_x-M_{x+n})/D_x}{(N_x-N_{x+k})/D_k}$$

$$kP^1_{x:\overline{n}|}=\frac{M_x-M_{x+n}}{D_x}\left(\frac{D_x}{N_x-N_{x+k}}\right)$$

消去 D_x，得

$$kP^1_{x:\overline{n}|}=\frac{M_x-M_{x+n}}{N_x-N_{x+k}}$$

对面值 F，将有

$$\boxed{kP^1_{x:\overline{n}|}=F\left(\frac{M_x-M_{x+n}}{N_x-N_{x+k}}\right)}$$

例 2.7.2　计算 Alison 的定期人寿保险每年的保费，假设她想在 10 年内付清.

$$kP^1_{x:\overline{n}|}=F\left(\frac{M_x-M_{x+n}}{N_x-N_{x+k}}\right)$$

$$10P^1_{57:\overline{13}|}=50\ 000\left(\frac{M_{57}-M_{70}}{N_{57}-N_{67}}\right)$$

$$=50\ 000\left(\frac{2014.22-1222.70}{70\ 531-29\ 271.95}\right)=959.21$$

请注意如果支付次数(k)等于保单期限(n)，公式可以相应地调整为：

$$\boxed{nP^1_{x:\overline{n}|}=F\left(\frac{M_x-M_{x+n}}{N_x-N_{x+k}}\right)\quad 这里\ k=n}$$

例 2.7.3　如果 Alison 想要以年保费支付她的保险费用，直到保期结束，计算例 2.7.2 中 Alison 的年保费.

这意味着她将通过 13 次付款还清保险费用 ($n=k=13$).

$$nP^1_{x:\overline{n}|}=F\left(\frac{M_x-M_{x+n}}{N_x-N_{x+k}}\right)$$

$$13P^1_{57:\overline{13}|}=50\ 000\left(\frac{M_{57}-M_{70}}{N_{57}-N_{70}}\right)$$

$$=50\ 000\left(\frac{2014.22-1222.70}{70\ 531-21\ 427.28}\right)=805.97$$

2.8　养老保险政策

事实上，养老保险是定期人寿保险和生存保险的组合，这种组合要求二者有相同保期(n). 不论被保险人死亡还是指定期限内在世，这种组合设计都能保证保单收益. 因此，保单面值会以任何利率支付. 如果在规定期限结束被保险人还在世，将支付给被保险人；

如果在规定期限内被保险人去世，将支付给幸存者. 因此，养老保单的一次性净保费($A_{x:\overline{n}|}$)是 n 期人寿保险的一次性净保费($A^{1}_{x:\overline{n}|}$)和 n 期生存保险的一次性净保费($_nE_x$)之和.

$$A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

面值 F 将是

$$\boxed{A_{x:\overline{n}|} = F\left(\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}\right)}$$

例 2.8.1 Dan 46 岁. 他刚刚购买了期限为 15 年的 65 000 美元养老保单. 他的保单费用是多少？

$$A_{x:\overline{n}|} = F\left(\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}\right)$$

$$A_{46:\overline{15}|} = 65\ 000\left(\frac{M_{46} - M_{46+15} + D_{46+15}}{D_{46}}\right)$$

$$= 65\ 000\left(\frac{2518.91 - 1789.21 + 4210.49}{9884.83}\right)$$

$$= 32\ 485.37$$

2.9 养老保单的年保费

就像其他保单一样，大额一次性净保费可以用年度分期偿还付清，年度分期偿还形成一种期初给付年金，这导致公式调整如下：

1. 如果年保费次数 (k) 等于保单期限(n)，即 $k=n$，那么

$$\boxed{P_{x:\overline{n}|} = F\left(\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}\right)}$$

2. 如果年保费次数 (k) 小于保单期限(n)，即 $k<n$，那么

$$\boxed{{}_kP_{x:\overline{n}|} = F\left(\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+k}}\right)}$$

注意 k 不能大于 n，k 总是小于或等于 n.

例 2.9.1 计算当按照保单期限还清成本时例 2.8.1 中养老保单的年保费.

$$P_{x:\overline{n}|} = F\left(\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}\right)$$

$$P_{46:\overline{15}|} = 65\ 000\left(\frac{M_{46} - M_{61} + D_{61}}{N_{46} - N_{61}}\right)$$

$$= 65\ 000\left(\frac{2518.91 - 1789.21 + 4210.49}{154\ 684.29 - 50\ 846.91}\right) = 3092.45$$

例 2.9.2 假设 Dan 想在 10 年之内付清他的一次性净保费. 他的年保费将是多少? 现在 $k=10$, 小于保单期限 $n(15)$.

$$kP_{x:\overline{n}|} = F\left(\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+k}}\right)$$

$$10P_{46:\overline{15}|} = 65\ 000\left(\frac{M_{46} - M_{61} + D_{61}}{N_{46} - N_{56}}\right)$$

$$= 65\ 000\left(\frac{2518.91 - 1789.21 + 4210.49}{154\ 684.29 - 76\ 228.19}\right) = 4092.89$$

2.10 少于年保费

在实际中, 保险公司不但同意对净保费每年分期付款, 而且可以每季、每月或其他周期分期付款. 这增加了投保人的成本, 但人们往往只能支付得起一笔小额保费, 因此尽管费用增加了, 但带来了这样一种便利. 增加的保费可以用一个附加的确定百分数(j)计算. 因此, 如果用 $P^{(m)}$ 表示少于年保费, 并且用 P 表示年保费, 可得

$$\boxed{P^{(m)} = \frac{P(1+j)}{m}}$$

例 2.10.1 假设前面提过的 Dan 支付不起每年 3092.45 美元的年保费, 并要求公司让他每隔一个月支付一次, 即一年支付 6 次. 给定额外的手续费为 6.5%, 确定其两月一次的保费是多少.

$$P = 3092.45;\ j = 6.5\% = 0.065$$

$$P^{(m)} = \frac{P(1+j)}{m}$$

$$P^{(6)} = \frac{3092.45(1+0.065)}{6} = 548.91$$

2.11 自然保费与水平保费

自然保费是以一年为期限的人寿保险的一次性净保费, 只有当被保险人在一年之内死亡时, 才保证支付保单面值. 我们可以通过使 $n=1$ 调整正常期限内人寿保险公式($A^1_{x:\overline{n}|}$), 以获得这种保费:

$$NA^1_{x:\overline{1}|} = \frac{M_x - M_{x+1}}{D_x}$$

$$NA^1_{x:\overline{1}|} = \frac{C_x}{D_x}$$

对面值 F, 公式将是

$$\boxed{NA^1_{x:\overline{1}|} = F\left(\frac{C_x}{D_x}\right)}$$

例 2.11.1 今年 75 岁的某人买了 100 000 美元的定期人寿保险保单, 自然保费将是

多少？

$$NA^{1}_{75:\overline{1}|} = F\left(\frac{C_{75}}{D_{75}}\right) = 100\ 000\left(\frac{62.78}{1462.66}\right) = 4292.18$$

由于自然保费用 C_x 除以 D_x 获得，它往往随着年龄增长而增加. 这是因为当人们年龄增加时，C_x增加而 D_x减少. 通常情况下，一年的自然保费被认为在该年度末足够支付所有的死亡索赔，当自然保费随老龄化戏剧性上升时，这种状况就变得很有问题了. 解决这种问题和使人寿保险负担得起的一种办法，就是依赖普通年保费，这被我们描述为水平保费. 水平保费保单在前面的年份比自然保费高，但在后面的年份比自然保费低. 为了平衡，最初几年要产生充足的盈余基金，随着利息实现积累，以面对多年后造成的赤字. 在表 2-1 和图 2-1 中，展示了自然保费与水平保费产生盈余和赤字的交互方式. 例如，我们采取发给 50 岁的人 100 000 美元的 15 年期限保险保单. 我们用通常的方法计算保单的水平保费：

$$nP_x = F\left(\frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}\right)$$

$$15P_{50} = 100\ 000\left(\frac{M_{50} - M_{50+15}}{N_{50} - N_{50+15}}\right)$$

$$= 100\ 000\left(\frac{2357.27 - 1542.78}{118\ 106.84 - 35\ 523.27}\right) = 986.26$$

这将从 50 岁至 64 岁，在整个 15 年期限都是固定的. 我们也用保单面值 100 000 美元乘以 C_x与 D_x 的比值来计算每年的自然保费. 从表 2-1 看到，水平保费比自然保费在 50 岁到 56 岁之间高，而在 57 岁到 64 岁之间低. 这种差异造成了图 2-1 中盈余和赤字的区域. 水平保费的直线首次穿越上述自然保费曲线在 57 岁处，然后保持在自然保费曲线的下方直到 15 年期限结束.

表 2-1 利率为 5% 的 100 000 美元在 15 年期限下的自然保费与水平保费比较

	(1) 年龄	(2) C_x	(3) D_x	(4) 水平保费 $15P_{50}$	(5) 自然保费 100 000[(2)・(3)]	(6) 盈余/赤字 [(4)−(5)]
1	50	44.85	7981.26	986.26	561.93	424.33
2	51	46.19	7556.49	986.26	611.26	375.00
3	52	47.53	7150.47	986.26	664.71	321.55
4	53	49.07	6762.44	986.26	725.62	260.64
5	54	50.49	6391.34	986.26	789.97	196.29
6	55	51.86	6036.50	986.26	859.11	127.15
7	56	53.05	5697.19	986.26	931.16	55.10
8	57	54.24	5372.84	986.26	1009.52	−23.26
9	58	55.48	5062.75	986.26	1095.85	−109.59
10	59	56.91	4766.18	986.26	1194.04	−207.78
11	60	58.38	4482.32	986.26	1302.45	−316.19
12	61	59.87	4210.49	986.26	1421.92	−435.66
13	62	61.23	3950.12	986.26	1550.08	−563.82
14	63	62.35	3700.79	986.26	1683.96	−697.70
15	64	63.00	3462.24	986.26	1819.63	−833.37

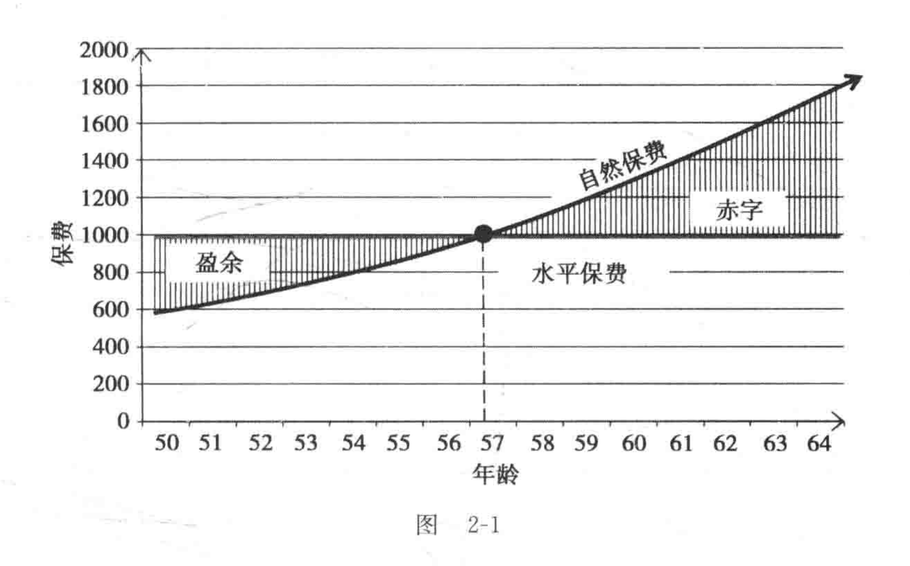


图　2-1

2.12　储备金和终端储备

保险储备金是保险费的累积价值与保险的累积成本之间的差值．具体而言，在表 2-1 中和图 2-1 中，我们看到在最初几年允许积累和获得利息，使得它可以用来支付到期的死亡索赔和其他义务，特别是在后面的年份累积保费落后于负债时．由于储备金的数额、它赚取的利息、死亡索赔、债务都要在保单期限的每年进行计算，余下的基金称为**终端储备**．因此，终端储备就是在保单年年底付清所有死亡索赔和其他债务之后按幸存者数目划分的盈余准备金．在这个意义上，终端储备将代表保单持有人选择年底中止该保单能够获得的最大数额．如果保单持有人想把保单作为这种贷款的安全资产，它还指示了保单持有人能从保险公司获得的最大保险额度．

有两种主要方法计算终端储备：追溯与前瞻．

追溯方法

表 2-2 表明一张发给 50 岁的人 100 000 美元的保单，在 15 年期限的每一年终端储备是如何具体获得的．因为终端储备在保单期限内每年末通过对年初的回顾来计算，所以这种获取终端储备的方法称为**追溯方法**．

表 2-2　追溯方法下的终端储备

(1) 保单年	(2) 年龄	(3) l_x	(4) d_x	(5) 年初的总保费 [(2)×986.25]	(6) 年初的储备 [(5)+(9)↑]	(7) 储备赚得的利息 [(6)×0.05]	(8) 年底的死亡索赔 (d_x×100 000)	(9) 年底的储备 [(6)+(7)=(8)]	(10) 终端储备 [(9)÷(3)]
1	50	91 526	540	90 268 432	90 268 432	4 513 422	54 000 000	40 781 854	445.58
2	51	90 986	584	89 735 852	130 268 432	6 525 885	58 400 000	78 643 591	864.35
3	52	90 402	631	89 159 876	167 803 467	8 390 173	63 100 000	113 093 640	1251.00
4	53	89 771	684	88 537 546	201 631 186	10 081 559	68 400 000	143 312 745	1596.43
5	54	89 087	739	87 862 944	231 175 689	11 558 784	73 900 000	168 843 473	1895.16
6	55	88 348	797	87 134 098	255 968 573	12 798 428	79 700 000	189 067 002	2140.03

（续）

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
				年初的总保费	年初的储备	储备赚得的利息	年底的死亡索赔	年底的储备	终端储备
保单年	年龄	l_x	d_x	[(2)×986.25]	[(5)+(9)↑]	[(6)×0.05]	(d_x×100 000)	[(6)+(7)=(8)]	[(9)÷(3)]
7	56	87 551	856	86 348 049	275 415 051	13 770 752	85 600 000	203 585 804	2325.34
8	57	86 695	919	85 503 810	289 089 614	14 454 481	91 900 000	211 644 095	2441.25
9	58	85 776	987	84 597 437	296 241 532	14 812 077	98 700 000	212 353 609	2475.68
10	59	84 789	1063	83 623 999	295 977 608	14 798 880	106 300 000	204 476 488	2411.59
11	60	89 726	1145	82 575 604	287 052 092	14 352 605	114 500 000	186 904 697	2232.34
12	61	82 581	1233	81 446 337	268 351 034	13 417 552	123 300 000	158 468 585	1918.98
13	62	81 348	1324	80 230 278	238 698 863	11 934 943	132 400 000	118 233 806	1453.43
14	63	80 024	1415	78 824 470	197 158 276	9 857 914	141 500 000	65 516 190	820.01
15	64	78 609	1502	77 528 912	143 045 102	8 582 706	150 200 000	1 427 808	18.16

作为计算终端储备过程的例子，我们按照 2441.25 美元保单第八年的终端储备计算如下：

1. 在第八年开头总保费[(5 列)]用那一年年初幸存者人数(l_x)乘以 986.26 美元水平保费(2.11 节计算过水平保费)来计算．

$$986.26 \times 86\ 695 = 85\ 503\ 810$$

2. 把步骤 1 中得到的数字(85 503 810)加到第(9)列前一年末(第七年)的储备中，得到 203 585 804：

$$85\ 503\ 810 + 203\ 585\ 804 = 289\ 089\ 614$$

这就得到了(6)列中的条目．

3. 根据步骤 2 中的数字将赚到 5%的利息，得到 14 454 481 美元．它将记录在(7)列．

$$289\ 089\ 614 \times 0.05 = 14\ 454\ 481$$

4. 年底死亡索赔通过保单面值 100 000 美元乘以(4) 列中的死亡人数 (d_x)而获得．

$$919 \times 100\ 000 = 91\ 900\ 000$$

这被记录在列 (8)．

5. 第八年末的储备金将通过把当年初的储备[(6)列]加上赚得的利息[(7)列]，然后减去死亡索赔[(8)列]得到．

$$(289\ 089\ 614 + 14\ 454\ 481) - 91\ 900\ 000 = 211\ 644\ 095$$

这就是记录在(9)列的第八年末的储备额．

6. 为了得到每个幸存者的终端储备，用(3)列活着的人数(l_x)去除步骤 5 求出的当年末的储备额．

$$211\ 644\ 095 \div 86\ 695 = 2441.25$$

我们还可以使用以下公式来获取任何一年 (t) 的终端储备而无需编制表：

$$\boxed{V = \frac{P(N_x - N_{x+t}) - (M_x - M_{x+t})}{D_{x+t}}}$$

其中 V 是保期第 t 年末每个幸存者的终端储备，P 是每 1.00 美元的年保费，t 是保期内的任何一年，其余通常都来自于附录中表 10 的换算值．

例 2.12.1 尝试用上述公式计算表 2-2 中每位幸存者第八年的终端储备.

$x=50$，$t=8$，$x+t=58$，每年的保费 986.26 除以保单面值 100 000 美元将获得每 1 美元的保费.

$$P=\frac{986}{100\ 000}=0.009\ 86$$

$$V=\frac{P(N_x-N_{x+t})-(M_x-M_{x+t})}{D_{x+t}}$$

$$V=\frac{P(N_{50}-N_{58})-(M_{50}-M_{58})}{D_{58}}$$

$$=\frac{0.009\ 86(118\ 1069.84-65\ 158.16)-(2357.27-1959.87)}{5062.95}$$

$$=0.0246$$

这就是 1.00 美元的终端储备. 所以，对面值 100 000 美元有

$$0.0246\times 100\ 000=2460$$

这个值非常接近我们在表 2-2 得到的值(2441). 差异是由于四舍五入.

前瞻方法

不像追溯方法只是向后回顾，前瞻方法是向前看保单的未来利益和未来责任. 在这种情况下，储备金将是未来福利现值超过未来保费现值的超额部分. 这可转换为在年龄 $x+t$ 的保险价值 A_{x+t} 和延迟 t 年按年收费的年保费 ${}_tA_x$ 之间的差.

$${}_tV_x=A_{x+t}-{}_tA_x$$

$${}_tV_x=F\left(\frac{(M_{x+t}-M_{x+n})}{D_{x+t}}\right)-P_x\left(\frac{N_{x+t}-N_{x+t}}{D_{x+t}}\right)$$

$$\boxed{{}_tV_x=\frac{F(M_{x+t}-M_{x+n})-P_x(P_{x+t}-N_{x+n})}{D_{x+t}}}$$

例 2.12.2 使用前瞻方法，计算前面例子中的第八年终端储备.

$$F=100\ 000;x=50;t=8;x+t=58;n=15;x+n=65$$

$${}_tV_x=\frac{F(M_{x+t}-M_{x+n})-P_x(N_{x+t}-N_{x+n})}{D_{x+t}}$$

$${}_8V_{50}=\frac{100\ 000[M_{58}-M_{65}]-986.26[N_{58}-N_{65}]}{D_{58}}$$

$$=\frac{100\ 000(1959.98-1542.78)-986.26(65\ 158.16-35\ 523.27)}{5062.75}$$

$$=2467$$

除了四舍五入造成的细微差异，结果接近我们早期希望的价值.

2.13 终端储备的好处

由于终端储备是在保期内任何一年的保险保单的价值，所以它可以服务保单持有人诸

多的金融需求．例如，可以用于确定保单持有人在终止支付的情形下可能收到的现金，或可以用于确定保单持有人在放弃保单的情形下可能收到的现金．它还可用作保单持有人确定从保险公司获得最大贷款额度的指导，利用其通常可以获得比商业银行最佳利率低得多的贷款利率．保单和其储备可以考虑用作贷款的安全资产．储备还可以被接收并用作一次性保费来扩展当前保单，或获取已付清保险的减少额．

2.14　应该买多少人寿保险

人寿寿险是保护保单中称为受益人的幸存者．这为他们失去爱人之后提供了继续正常生活的能力．估计购买人寿保险的数额有两种方法．

感性方法

感性方法是十分主观的．基本上，它涉及保险买方对保险金额的选择，反映了他对受益人的情感价值，购买数额的多少并非实际需要．在这种情况下，人们可能选择购买 100 万美元或更多的保险，只是表明保单持有人想在其死后用这些钱来帮助他们的家人．

理性方法

在理性方法中，保险买家依靠某些标准考虑他们购买保险的金额．他们可能考虑一个非常一般的度量，诸如被保险人的收入，或更进一步地分析幸存者可能需要面对的更多需求．理性方法中常用两种通用方法．

多盈方法

这种方法既简单又直接．它把被保险人的收入作为估计的基础．想要购买保险的人可以将她的收入乘以一定倍数，比如 5、10 或任何其他数字，这样，所得最终金额将会产生所需的人寿保险收益给受益人．表 2-3 对男人和女人设计了几个不同期限的保单，显示每购买 100 000 美元保险的平均保费的一般估计．例如，如果一名 50 岁男子想要买 25 年期限等于他 75 000 美元年收入的五倍的人寿保险，保险金额将为

$$75\ 000 \times 5 = 375\ 000$$

他的保费将为

$$375\ 000 \div 100\ 000 = 3.75$$

看表 2-3 中男性部分年龄 50 和保单期限 25 交叉处，我们发现每 100 000 美元年保费为 762 美元．因为我们前面计算得到 3.75，所以保费将是

$$3.75 \times 762 = \$\,2857.50 \quad 每年$$

需求方法

此方法考虑更多的客观因素来决定要买多少人寿保险．它考虑在被保险人死后影响受益者生活的最常见的因素．它还考虑到了金钱的时间值．除了在被保险人死后一定年数的收入要求之外，还要考虑政府福利金，与被保险人的死亡有关的最终费用，对配偶和子女的可调节花费，子女的教育，或有无家庭债务．被保险人可以指定任何一种重要金融要素进入需要的保险金额的计算．下面的公式总结了大多数要素，LA 是所需的人寿保险金额．

$$\boxed{\mathrm{LA}=\mathrm{PV}(0.75Y_d)+\mathrm{OT}-[\mathrm{PV}(G)+\mathrm{CI}]}$$

表 2-3　每购买 100 000 美元保险的平均年保费

性别	年龄	保单期限(年)					
		5	10	15	20	25	30
男	20	144	133	154	166	216	187
	30	152	134	157	172	229	250
	40	195	170	208	235	356	375
	50	253	310	409	467	762	825
	55	510	455	610	750	1174	1306
女	20	125	116	154	166	216	187
	30	135	124	142	148	189	210
	40	176	150	186	204	279	301
	50	272	240	317	358	559	604
	55	343	320	429	514	848	984

$\mathrm{PV}(0.75Y_d)$：受益者未来收入流的现值．这项收入取决于受益者将需要被保险人在工作年份可支配收入(Y_d)的大约 75％这个推断．假定扣减掉的 25％是他在家庭收入中的份额．

OT：所需费用的矢量，包括但不限于如下所述的 F、R、D 和 E．

F：与死者有关的殡葬的最后开支．

R：与配偶及子女有关的休息、培训及获得一份工作、治疗或心理治疗和类似的调整费用．

D：被保险人留下的任何需要付清的债务．

E：被保险人子女上大学可能需要的教育费用．

PVG：政府将来所得利益流的现值，比如社会保障遗属津贴等．该项是扣除项目．

CI：在被保险人死亡时刻存在的当前保单，例如雇主的保险和其他私人保险，该项目也被扣减．

LA 方程可以改写为

$$\boxed{\mathrm{LA}=\frac{0.75Y_d[1-(1+r)^{-n}]}{r}+\mathrm{OT}+\left[\frac{G[1-(1+r)^{-k}]}{r}+\mathrm{CI}\right]}$$

Y_d：被保险人的可支配收入．

r：计算贴现的利率．它往往是考虑了通货膨胀之后的税后投资率．

n：对受益者需求估计的时间．它是由被保险人所决定的，比如直到最小的孩子读完大学的时刻，或者直到寡妇活到 65 岁的时刻等．

OT：诸如 $F+R+D+E$ 这些未偿贷款等费用的总和．

G：每年的政府补贴．

K：由社会保障行政部门确定的政府福利终止时刻．与 n 不同的是，它不由被保险人的主观决定．

CL：现有的保险．

如果我们对现值因子使用表值，LA 公式将是

$$\boxed{\text{LA} = (0.75Y_d) \cdot a_{\overline{n}|r} + \text{OT} + G \cdot a_{\overline{k}|r} + \text{CI}}$$

例 2.14.1 Bryan 和 Heather 是结婚 30 年的一对夫妇. 他们有两个孩子. Bryan想要在他死后至少 25 年内他的家人可以舒适地生活，所以想购买人寿保险去实现目标. 这里有一些数据：

收入总额：60 000 美元

税收和工资中扣除项目：18 000 美元

社会保障福利：一个月 2400 美元，持续 14 年

儿童教育基金：80 000 美元

需要付清的债务：12 000 美元

Heather 和孩子的调整费用：20 000 美元

最终消费支出：10 000 美元

考虑到这对夫妇已拥有 85 000 美元的现有保险，如果利率是 5%，他们将需要购买多少钱的人寿保险？

$$Y_d = Y_g - (T + D) = 60\,000 - 18\,000 = 42\,000$$

$$0.75Y_d = 0.75(42\,000) = 31\,500$$

$$n = 25 \quad r = 0.05 \quad k = 14$$

$$G = 2400 \times 12 = 28\,800$$

$$\text{OT} = E + D + R + F$$

$$\text{OT} = 80\,000 + 12\,000 + 20\,000 + 10\,000 = 122\,000$$

$$\begin{aligned}\text{LA} &= \frac{0.075Y_d[1-(1+r)^{-n}]}{r} + \text{OT} - \left[\frac{G[1-(1+r)^{-k}]}{r} + \text{CI}\right] \\ &= \frac{31\,500[1-(1+0.05)^{-25}]}{0.05} + 122\,000 \\ &\quad - \left[\frac{28\,800[1-(1+0.05)^{-14}]}{0.05} + 85\,000\right] \\ &= 443\,959.25 + 122\,000 - (285\,079.7 + 85\,000) \\ &= 195\,879\end{aligned}$$

如果我们使用附录中表 10 的值作为现值：

$$\begin{aligned}\text{LA} &= (0.75Y_d) \cdot a_{\overline{n}|r} + \text{OT} - (G \cdot a_{\overline{k}|r} + \text{CI}) \\ &= 31\,500(a_{\overline{25}|5}) + 122\,000 - [28\,800(a_{\overline{14}|5}) + 85\,000] \\ &= 31\,500(14.0939) + 122\,000 - [28\,800(9.8986) + 85\,000] = 195\,878.17\end{aligned}$$

第3章 财产和意外保险

大多数的财产和意外保险保单涵盖财产和责任风险的保障. 他们偿还保单持有人由于任何损害、破坏或使用投保人拥有或控制的财产造成的损失. 火灾、车祸、破坏和风暴都是**意外损害**的例子. 财产和意外保险还偿还其他人造成的但由保单持有人负责的财产损坏和身体伤害. 我们称这种赔偿为**责任保险**.

偿还时，指导保险概念的论证包含两个主要原则.

1. 首先经济损失一定是投机风险和纯粹风险对比的结果. 当只有潜在的损失并没有潜在的收益时，发生纯粹的风险. 而投机性风险包括了潜在的收益和损失两个方面，如在赌博中，不知道会发生什么情况，不能保证赌徒的损失能得到偿还.
2. 第二项原则是保险不会支付比实际的经济损失更多的补偿，这种行为被称为**损害补偿原则**.

这里主要关注的问题是如何评估实际损失. 保险公司已经制定他们支付的原则，即所谓的**实际现金价值**原则，与保单持有人财产的原始成本和重置成本截然相反. 实际的现金价值考虑了由于磨损和市场条件造成的财产折旧，同时重置价值考虑财产的原始成本和增值价值. 实际的现金价值很容易计算，可以通过从财产的原始成本(OC)中拿掉折旧影响. 折旧影响将考虑财产的当前年龄(CA)和其预期寿命(LE).

$$\mathrm{ACV}=\mathrm{OC}-\left(\mathrm{CA}\cdot\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{LE}}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{ACV}=\mathrm{OC}-\left(1-\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{LE}}\right)}$$

例 1 一张 4 年前购买的沙发价格为 1500 美元. 如果保险理算人员估计这张沙发的寿命是 9 年，确定将给投保人多少偿付.

$$\mathrm{OC}=1500;\quad \mathrm{CA}=4;\quad \mathrm{LE}=9.$$

$$\mathrm{ACV}=\mathrm{OC}\left(1-\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{LE}}\right)=1500\left(1-\frac{4}{9}\right)=833.33$$

例 2 例 1 中的投保人希望用他的沙发替换一个新的沙发，和他失去的那个沙发一样. 考虑到每年平均 1.75% 的通货膨胀率，保单持有人希望重置价值是多少?

因为购买替换沙发，重置价值(RV)包括原始成本加上原始成本的改变量(ΔOC).

$$\boxed{\mathrm{RV}=\mathrm{OC}+\Delta\mathrm{OC}}$$

原始成本的改变是由于通货膨胀导致的价格上涨，因为沙发在 4 年前购买，每年用 1.75%来计算.

$$\boxed{\Delta\mathrm{OC}+\mathrm{OC}\cdot f\cdot t}$$

其中 OC 是原始成本，f 是每年的通胀率，t 是时间.

$$\Delta OC = 1500(0.0175)(4) = 105$$
$$RV = OC + \Delta OC = 1500 + 105 = 1605$$

如果插入 ΔOC 到 RV 公式中，我们得到

$$RV = OC + \Delta OC$$
$$RV = OC + OC \cdot f \cdot t$$
$$\boxed{RV = OC(1 + f \cdot t)}$$

这比早先的公式更方便，我们得到完全相同的结果：

$$RV = 1500[1 + (0.0175)(4)] = 1605$$

例 3 7 年前购买的 1350 美元的电视机的重置价值是多少？通货膨胀率每年平均为 2.25%.

$$RV = OC(1 + ft) = 1350[1 + 0.0225(7)] = 1562.62$$

再次，保险公司不会考虑其偿还的重置价值，但可能会依赖于实际的现金价值.

3.1 免赔额和共同保险

免赔额是保单持有人的保险赔偿金的初始份额，**共同保险**是全部赔偿的最终保单持有人的份额. 免赔额是一笔总钱数，而共同保险是百分比数. 例如，如果一份保单覆盖率为 85∶15，这意味着整个赔偿在保险人与被保险人之间被拆分，其中承保人拿走 85%，被保险人拿走 15%. 免赔额和共同保险二者都是减少保险人的最终成本的战略，同时提升和推动被保险人更多的责任. 如果他们要负担部分费用，人们三思后才提交索赔. 一些保险公司对保单持有人提供可选免赔额选项.

以下特定于住宅财产保险，公司要求对任意房屋损失的覆盖要占已保财产重置价值的至少 80%. 80%的规范是根据土地是财产价值的 20%的假设，即使财产被烧为灰烬，土地所占的 20%价值都不会蒙受任何损害. 这就是为什么 80%将被视为等于财产结构和内容的完全保险. 因此，住宅损失的补偿(R_d)将计算为：

$$\boxed{R_d = \frac{I}{0.80RV}(L - D)}$$

其中 I 是已购保险，L 是索赔的总损失，D 是免赔额，RV 是财产的重置价值.

例 3.1.1 一所房子的重置价值为 135 000 美元，但是投了 108 000 美元保费，具有 1000 美元免赔额，因一场大火造成了 60 000 美元损失. 确定保险补偿.

I=108 000；RV=135 000；L=60 000；D=1000.

$$R_d = \frac{I}{0.80RV}(L - D) = \frac{108\ 000}{0.80(135\ 000)}(60\ 000 - 1000) = 59\ 000$$

59 000 美元是考虑了免赔额条件下的完全保险覆盖. 保险完全补偿损失的原因是保单持有人购买了完全保险，因为 108 000 是完全重置值的 80%.

我们考虑以下的例子，保单持有人购买的保险保单低于重置值.

例 3.1.2 假设例 3.1.1 中投保人已购买价值仅 96 000 美元的保险. 60 000 美元的损失赔偿多少？

$$R_d = \frac{I}{0.80\text{RV}}(L-D) = \frac{96\ 000}{0.80(135\ 000)}(60\ 000-1000) = 52\ 444$$

将赔偿 52 444 美元，保单持有人选择购买相同金额的保险覆盖，是小于全面覆盖的保险要求的. 如果我们仔细看，可以快速发现保单持有者只购买了所要求的 88.8%(96 000/108 000=88.8%)，保险偿还占全覆盖的 88.8%(52 444/59 000=88.8%).

3.2　医疗保险

医疗保险以各种健康计划的形式出现，如一个健康维护组织(HMO)、优先提供商组织(PPO)、管理护理计划(MCP)、政府卫生保健项目如医疗保险和医疗补助，以及私人医疗保险. 偿还首先受计划的类型和各种可用的覆盖范围的影响. 在计算偿还时，免赔额和共同保险两个元素扮演着重大角色. 在医疗保险领域，免赔额通常有两种类型：每个事件免赔额(例如住院治疗或手术)，以及年度免赔额. 共同保险只是投保人投保份额的比例，因计划的不同而不同. 通常情况下，医疗保险补偿(R_h)计算如下：

$$\boxed{R_h = (I-\text{CP})(L-D)}$$

其中 CP 是保单持有人的共同保险百分比，L 是总的财务损失（整个医疗条例草案），D 是免赔额.

例 3.2.1　一个人一次事故后必须住院接受 6 天治疗. 医院收取每天 500 美元，医生的费用是 3620 美元，化验费 987 美元，救护车服务成本 340 美元. 他有一个 80：20 的保险计划，该计划包括每个事件 500 美元的免赔额. 计算他期望他的保险支付多少？他自己将支付多少？

$$\text{CP} = 20\%;\ D = 500.$$

首先，我们要计算所有的医疗费用以获得 L：

$$L = (6\times 500) + 3620 + 897 + 30 = 7857$$

$$R_h = (1-\text{CP})(L-D) = (1-0.20)(7857-500) = 5885.60$$

这是保险的份额，这里是 80%——不是 7857 美元账单的全部，而是扣除免赔额后所得账单 7357 美元的 80%. 这将留给保险人

$$7857 - 5885.60 = 1971.50$$

保单持有人 1917.40 美元的份额被在 500 美元免赔额和 1471.40 美元共同保险之间分解. 这里要注意到，被保险人在现实中付出的比账单的 20%要多，这是十分重要的. 在这种情况下，他支付了 7857 美元中的 1971.40 美元，超出总额的 25%多一点，保险公司支付了 7857 美元中的 5885.6 美元，略低于账单 75%一点点，而不是陈述的总额 80%的份额. 这种差异的原因当然是免赔额！保单持有人 20%份额就是 1471.40 美元占总账单扣除免赔额后的比例([1471.40/(7857−500)]).

保单持有人的负担金额可能会有不同类别和名称. 例如，为家庭医生访问负担金额有别于专家访问负担金额. 另外，还有针对不同药物治疗负担的金额，以及不同种类服务的负担金额，例如化验费和类似收费. 总体而言，在保单持有人支付了约定服务种类的共同保险并加上免赔额之后，保险赔偿责任将被保险公司按份额承担.

我们考虑下面的示例，阐释如何计算保险和各种医疗服务的份额，每个都有其自己的保单允许的共同保险.

例 3.2.2 假设病人支付了如下医疗费用：8 次访问家庭医生，每次 75 美元医疗费用；两次访问医疗专家，每次 105 美元；4 次 X 射线，每次 59 美元；三个实验室报告，每个 70 美元；12 次开处方，平均每次 60 美元；2 次访问一名营养师，每次 55 美元. 保险保单指定为每个类别负担金额如下：家庭医生 15 美元；医疗专家 35 美元、X 射线 20 美元、实验室服务 30 美元、处方 15 美元及 10 美元的专业服务. 计算保险补偿、投保人份额及两者的百分比.

最佳的计算方法是组织信息如表 E3-2-2，其中：

n：每个类别的单位数.

k：单位成本.

nk：每个类别的成本.

CP：保单指定的每个类别的共同保险.

nCP：每个类别的共同保险成本.

$k-$CP：每单位共同保险和成本之间的差.

n ($k-$CP)：每个类别共同保险和成本之间的差.

表 E3-2-2

类别	n	k	nk	CP	nCP	$k-$CP	$n(k-$CP)
家庭医生	8	75	600	15	120	60	480
专科	2	105	210	35	70	70	140
X 射线	4	59	236	20	80	39	156
实验室报告	3	70	210	30	90	40	120
处方	12	60	720	15	180	45	540
营养师	2	55	110	10	20	45	90
			2086		560	299	1526

实际上，保险公司承担已付保单持有人份额的成本，就是保险公司支付每个类别的钱款. 总之，所有类别的成本($\sum nk$)是 2 086 美元，并且总的共同保险成本($\sum n$CP)是 560 美元，这是保单持有人的份额，差将是保险份额或偿还额 (R_n)：

$$R_n = \sum(nk) - \sum(n \cdot \mathrm{CP}) = 2086 - 560 = 1526$$

上述的偿还方程可以被重写为

$$R_n = \sum nk - \sum n\mathrm{CP}$$

$$\boxed{R_n = \sum n(k - \mathrm{CP})}$$

这是最后一列 $n(k-$CP)的合计，共 1526 美元确认结果. 至于百分比，保险公司将支付 73%(1526÷2086)，保单持有人将支付其余的 27%(560÷2086).

3.3 政策限制

大多数的保险保单都指定某些赔偿的限制，要么是限制每个事件，要么是限制每年，

抑或两者都做限制. 我们假设例 3.2.2 中已经指定每个事件 1350 美元的限额(疾病或损伤以及类似的情况). 根据这项政策，保险不会支付 1526 美元的计算份额. 如同已经指出的一样，它将支付的最大限额也只是 1350 美元，保单持有人不得不承担 176 美元(1526 美元—1350 美元).

每年限额的运作方式是相同的. 假设有 12 000 美元年度保单限额，而且在其他许多情况下对这个病人全年保险支付 11 000 美元. 现在这个病人有一种新的治疗情况，保险公司的份额达到 1526 美元，他们将坚持 12 000 美元覆盖限额中余下只有 1000 美元的部分，只会赔付计算总额 1526 美元中剩下的 1000 美元. 投保人不得不承担其余的 526 美元. 在这两个强加保单限制的例子中，保单持有人最终可能要支付比保单条款陈述更高百分比的共同保险.

单元八附录

小结

最后一个单元讲了保险数学. 我们先学了生存年金，它与我们先前学的一些年金有别，并且和人寿保险有关. 我们讨论了死亡率表，它是理解和计算所有生存年金和保险的核心概念. 其后是代偿条款的解释，它是对死亡率表在概念和技术上的其他重要补充. 生存保险作为一次性支付在生存年金的所有常见类型之前讨论. 我们讨论和计算了终身生存年金：普通的、按期的和延期的. 临时生存年金进一步细分为普通的、到期的和延期的.

人寿保险是该单元第 2 章的主题. 讨论了三种主要类型的人寿保险：终身人寿保单、定期人寿保单和养老保单. 我们计算了定期付款的每年保费，也计算了有相同递延保费的分 m 期付款的每年保费. 接下来讨论了定期人寿保单，其次是养老保单. 此外讨论了非年度化保费，做了自然和水平保费的比较. 下一步讨论了储备和终端储备的概念，其计算包括两种方法：追溯与前瞻.

人寿保险一章中最后一个主题是如何估计对人寿保险的需求. 在这里，解释了四种办法：感性、理性、多盈和需求.

最后讨论的一类保险类型是财产、意外和医疗保险. 讨论并计算两个重要的技术术语——实际现金价值和重置价值，以及免赔额、共同保险和政策限制.

公式列表

死亡率表

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

$$q_x + p_x = 1$$

$$np_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

$$nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

代偿条款

$$D_x = l_x \cdot v^x = \frac{l_x}{(1+r)^x}$$

$$N_x = \sum_{k=x}^{x+100} D_k$$

$$C_x = d_x \cdot v^{x+1}$$

$$M_x = \sum_{k=x}^{x+100} C_k$$

生存保险

$$nE_x = p\left(\frac{l_{x+n}}{l_x}\right)v^n$$

$$nE_x = P\left(\frac{D_{x+n}}{D_x}\right)$$

普通终身生存年金

$$a_x = P\left(\frac{N_{x+1}}{D_x}\right)$$

按期支付终身生存年金

$$\ddot{a}_x = P\left(\frac{N_x}{D_x}\right)$$

延期支付终身生存年金

$$n|a_x = P\left(\frac{N_{x+1+n}}{D_x}\right)$$

$$n|\ddot{a}_x = P\left(\frac{N_{x+n}}{D_x}\right)$$

临时生存年金

$$a_{x:\overline{n}|} = P\left(\frac{N_{x+1} - N_{x+1+n}}{D_x}\right)$$

按期支付临时生存年金

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = P\left(\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}\right)$$

抑制临时人寿保险

$$nF_x = P\left(\frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}}\right)$$

延期支付临时生存年金

$$k|\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = P\left(\frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x}\right)$$

保险的成本(一次性净保费)

$$A_x = F\left(\frac{M_x}{D_x}\right)$$

终身保费

$$P_x = F\left(\frac{M_x}{N_x}\right)$$

m 次付款保费

$$mP_x = F\left(\frac{M_x}{N_x - N_{x+m}}\right)$$

递延终身人寿保单

$$n|A_x = F\left(\frac{M_{x+n}}{D_x}\right)$$

递延的保费——终身

$$n|P_x = F\left(\frac{M_{x+n}}{N_x}\right)$$

递延的保费——m 次付款

$$mP(n|A_x) = F\left(\frac{M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}\right)$$

定期人寿保险

$$A^1_{x:\overline{n}|} = F\left(\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}\right)$$

定期生存保费

$$kP^1_{x:\overline{n}|} = F\left(\frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+k}}\right)$$

$$nP^1_{x:\overline{n}|} = F\left(\frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}\right)$$

养老保险

$$A^1_{x:\overline{n}|} = F\left(\frac{M_x - M_{x+n} + N_{x+n}}{D_k}\right)$$

养老保费

$$P^1_{x:\overline{n}|} = F\left(\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}\right)$$

$$kP^1_{x:\overline{n}|} = F\left(\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+k}}\right)$$

少于每年保费

$$p^{(m)} = \frac{p(1+j)}{m}$$

自然保费

$$NA^1_{x:\overline{1}|} = F\left(\frac{C_x}{D_x}\right)$$

终端储备——回溯

$$V = \frac{P(N_x - N_{x+t}) - (M_x - M_{x+t})}{D_{x+t}}$$

终端储备——前瞻

$$tV_x = \frac{F(M_{x+t} - M_{x+n}) - P_x(N_{x+t} - N_{x+n})}{D_{x+t}}$$

需求方法

$$\mathrm{LA} = \mathrm{PV}(0.75Y_d) + \mathrm{OT} - [\mathrm{PV}(G) + \mathrm{CI}]$$

$$\mathrm{LA} = \frac{0.75Y_d[1-(1+r)^{-n}]}{r} + \mathrm{OT} + \left[\frac{G[1-(1+r)^{-k}]}{r} + \mathrm{CI}\right]$$

$$\mathrm{LA} = (0.75Y_d)\cdot a_{\overline{n}|r} + \mathrm{OT} + (G\cdot a_{\overline{n}|r} + \mathrm{CI})$$

实际现金价值

$$\mathrm{ACV} = \mathrm{OC}\left(1 - \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{LE}}\right)$$

重置值

$$\mathrm{RV} = \mathrm{OC} + \Delta\mathrm{OC}$$

$$\Delta\mathrm{OC} = \mathrm{OC}\cdot f\cdot t$$

$$\mathrm{RV} = \mathrm{OC}(1 + f\cdot t)$$

偿还——住宅

$$R_d = \frac{\mathrm{I}}{0.80\mathrm{RV}}$$

$$R_d = \frac{\mathrm{I}}{0.80\mathrm{RV}}(L-D)$$

偿还——医疗

$$R_h = (1-\mathrm{CP})(L-D)$$

$$R_n = \sum n(k-CP)$$

习题

1. 一个人从 35 岁活到 80 岁的可能性是多少？
2. 一个 20 岁的男人在他第四十个生日之前死亡的概率是多少？
3. 如果每个年龄组里的每个人每年的年金都是 430 美元，那么 65 岁年龄组的每个人现在年金的面值是多少？
4. 如果每个人都支付 500 美金，那么对 72 岁死亡的所有人其零岁的现值是多少？
5. Robert 想要妻子在其 55 岁退休时得到生存保险 100 000 美元，而他从现在到退休尚有 15 年时光．如果金钱价值 5%，他必须每年存入多少钱？
6. 一个想要买终身年金的人为了在他余生的每年年底能够收到 3600 美元，如果他现在 53 岁他要交多少保费？
7. 假设在练习 6 里的那个人想要收到 4000 美元，并且在每年年初支付，那么他将支付多少保费？
8. 一个 37 岁的人希望设置普通年金，当她 47 岁开始的整个余生，每年都能得到 5000 美元的报酬，她应该支付什么额度的保费？
9. 57 岁的 Chuck 想要一份年金能每年支付他 5000 美元，并且持续 15 年．他将为这份年金一次性支付多少？
10. 一个临时生存年金给一个年轻人每年支付 4200 美元，并且持续十年，但是从现在起直到五年后才会开始．这项年金的净保费是多少？
11. 一个男人想要购买一份在他死后会给他妻子支付 150 000 美元的人寿保险保单．他现年 52 岁．他一次性支付的保费是多少？
12. 计算一位 47 岁的女性的一笔 177 00 人寿保险的每年的保费．
13. 一位 51 岁的男士欲购买一份价值 235 000 美元的人寿保险保单，但他想把一次性付款的保费分解为九次年支付保费．那每年要支付多少？
14. Sandra 50 岁了，想要开始支付一份 75 000 美元的保险保单，这份保单在她 10 年或更久死亡以后才生效．她交付的一次性保费是多少？
15. 在计算出练习 14 中 Sandra 的一次性保费后，如果 Sandra 改变她支付净保费的想法，计算每年的保费．
16. 如果 Sandra 改变想法，想要用六年支付她的保费，她每年支付保费多少？
17. 63 岁的 Blake 想购买一份 85 000 美元、期限为十年的人寿保险．他将支付多少保费？
18. 假设 Blake 想要在保期内支付他每年的保费，那么他的年保费将是多少？
19. 如果 Blake 把保费支付分解为五年的年支付，那么他每年的保费将是多少？
20. 对于一位 57 岁的女士而言，计算一份价值 95 000 美元、期限十年的养老保险保单的

成本.

21. 对于一位68岁的男士而言，一份价值150 000美元、期限是7年的养老保险保单的年保费将是多少?
22. 如果一份保单的年保费是5500美元，并且保险公司收费8%，允许被保险人每三个月支付，每次支付多少?
23. 计算一位购买50 000美元保险保单的81岁女士的自然保费是多少?
24. 使用前瞻方法，计算一个有2000美元8年养老保险保单的三十岁女士的第六次终端储备.
25. 从表2-2中取值，使用公式计算第十一年保单的终端准备，该保单匹配或会非常接近2232.34美元.
26. 使用需求方法来计算Jackie需要多少人寿保险，她有50 000美元毛收入、要支付8000美元的付税和扣除费. 她想要一份人寿保险保单能覆盖她女儿50 000美元的教育费用，20 000美元偿还按揭贷款余额，10 000美元为她丈夫和女儿的调整费用，及最后费用7000美元. 社会保障福利将是12年中每月2500美元，而且她已有25 000美元保险，考虑利息率是6%.
27. 对于一台因火灾而受损的电视系统，如果两年前购买的价值为6000美元，预期寿命为5年，那么保险补偿会是多少?
28. 在练习27中，如果通货膨胀率一直稳定在4%，电视机系统的重置价值是多少?
29. 风暴导致一座投保为180 000美元的房子产生了25 000美元的损失；房屋的重置价值估计为250 000美元. 该保单要求1500美元免赔额.
30. 计算一个人的医疗保险补偿，这个人出了一场车祸，不得不在医院呆10天，在医院每天花费750美元，医生的实验室和救护车服务成本为2315美元. 他的共同付费是85.15美元，免赔额是560美元.

附　　录

表 1　普通整除 $\left(\frac{1}{100}\right)$% 和换算值

分数的分母	分数的分子												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	单位：$\left(\frac{1}{100}\right)$或 %												
2	50												
3	$33\frac{1}{3}$	$66\frac{2}{3}$											
4	25		75										
5	20	40	60	80									
6	$16\frac{2}{3}$				$83\frac{1}{3}$								
7	$14\frac{2}{7}$	$28\frac{4}{7}$	$42\frac{6}{7}$	$57\frac{1}{7}$	$71\frac{3}{7}$	$85\frac{5}{7}$							
8	$12\frac{1}{2}$		$37\frac{1}{2}$		$62\frac{1}{2}$		$87\frac{1}{2}$						
9	$11\frac{1}{9}$	$22\frac{2}{9}$		$44\frac{4}{9}$	$55\frac{5}{9}$		$77\frac{7}{9}$	$88\frac{8}{9}$					
10	10		30				70		90				
11	$9\frac{1}{11}$	$18\frac{2}{11}$	$27\frac{3}{11}$	$36\frac{4}{11}$	$45\frac{5}{11}$	$54\frac{6}{11}$	$63\frac{7}{11}$	$72\frac{8}{11}$	$81\frac{9}{11}$	$90\frac{10}{11}$			
12	$8\frac{1}{3}$				$43\frac{2}{3}$		$58\frac{1}{3}$				$91\frac{2}{3}$		
13	$7\frac{9}{13}$	$15\frac{5}{13}$	$23\frac{1}{13}$	$30\frac{10}{13}$	$38\frac{6}{13}$	$46\frac{2}{13}$	$53\frac{11}{13}$	$61\frac{7}{13}$	$69\frac{3}{13}$	$79\frac{12}{13}$	$84\frac{8}{13}$	$92\frac{4}{13}$	
14	$7\frac{1}{7}$		$21\frac{3}{7}$		$35\frac{5}{7}$				$64\frac{2}{7}$		$78\frac{4}{7}$		$92\frac{6}{7}$
15	$6\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$		$26\frac{1}{3}$			$46\frac{2}{3}$	$53\frac{1}{3}$			$73\frac{1}{3}$		$86\frac{2}{3}$
16	$6\frac{1}{4}$		$18\frac{3}{4}$		$31\frac{1}{4}$		$43\frac{3}{4}$		$56\frac{1}{4}$		$68\frac{3}{4}$		$81\frac{1}{4}$
20	5		15				35		45		55		65

资料来源：S. Shao an L. Shao(1998). *Mathematics for Management and Finance*. South-Western, Cincinnati, OH.

表 2　四位常用对数

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0924	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3076	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6374	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	9493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6461	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316

（续）

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8878	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

资料来源：E. T. Dowling (1980). *Mathematics for Economists*. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill New York.

表 3　e^x 和 e^{-x} 的值

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0.0	1.000	1.000	5.0	148.4	0.0067
0.1	1.105	0.905	5.1	164.0	0.0061
0.2	1.221	0.819	5.2	181.3	0.0055
0.3	1.350	0.741	5.3	200.3	0.0050
0.4	1.492	0.670	5.4	221.4	0.0045
0.5	1.649	0.607	5.5	244.7	0.0041
0.6	1.822	0.549	5.6	270.4	0.0037
0.7	2.014	0.497	5.7	298.9	0.0033
0.8	2.226	0.449	5.8	330.3	0.0030
0.9	2.460	0.407	5.9	365.0	0.0027
1.0	2.718	0.368	6.0	403.4	0.0025
1.1	3.004	0.333	6.1	445.9	0.0022
1.2	3.320	0.301	6.2	492.8	0.0020
1.3	3.669	0.273	6.3	544.6	0.0018
1.4	4.055	0.247	6.4	601.8	0.0017
1.5	4.482	0.223	6.5	665.1	0.0015
1.6	4.953	0.202	6.6	736.1	0.0014
1.7	5.474	0.183	6.7	812.4	0.0012
1.8	6.050	0.0165	6.8	897.8	0.0011
1.9	6.686	0.0150	6.9	992.3	0.0010
2.0	7.389	0.135	7.0	1096.6	0.0009
2.1	8.166	0.122	7.1	1212.0	0.0008
2.2	9.025	0.111	7.2	1339.4	0.0007
2.3	9.974	0.100	7.3	1480.3	0.0007
2.4	11.023	0.091	7.4	1636.0	0.0006
2.5	12.18	0.082	7.5	1808.0	0.000 55
2.6	13.46	0.074	7.6	1998.2	0.000 50
2.7	14.88	0.067	7.7	2208.3	0.000 45
2.8	16.44	0.061	7.8	2440.6	0.000 41
2.9	18.17	0.055	7.9	2697.3	0.000 37
3.0	20.09	0.050	8.0	2981.0	0.000 34
3.1	22.20	0.045	8.1	3294.5	0.000 30
3.2	24.53	0.041	8.2	3641.0	0.000 27
3.3	27.11	0.037	8.3	4023.9	0.000 25
3.4	29.96	0.033	8.4	4447.1	0.000 22
3.5	33.12	0.030	8.5	4914.8	0.000 20
3.6	36.60	0.027	8.6	5431.7	0.000 18
3.7	40.45	0.025	8.7	6002.9	0.000 17
3.8	44.70	0.022	8.8	6634.2	0.000 15
3.9	49.40	0.020	8.9	73 332.0	0.000 14
4.0	54.60	0.018	9.0	8103.1	0.000 12

（续）

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
4.1	60.34	0.017	9.1	8955.3	0.000 11
4.2	66.69	0.015	9.2	9897.1	0.000 10
4.3	73.70	0.014	9.3	10 938.0	0.000 09
4.4	81.45	0.012	9.4	12 088.0	0.000 08
4.5	90.02	0.011	9.5	13 360.0	0.000 07
4.6	99.48	0.010	9.6	14 765.0	0.000 07
4.7	109.95	0.009	9.7	16 318.0	0.000 06
4.8	121.51	0.008	9.8	18 034.0	0.000 06
4.9	134.29	0.007	9.9	19 930.0	0.000 05

表 4 一年中每天的序号表

天	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月	天
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335	1
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336	2
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337	3
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338	4
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339	5
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340	6
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341	7
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342	8
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343	9
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344	10
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345	11
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346	12
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347	13
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348	14
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349	15
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350	16
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351	17
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352	18
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353	19
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354	20
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355	21
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356	22
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357	23
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358	24
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359	25
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360	26

（续）

天	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月	天
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361	27
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362	28
29	29	[a]	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363	29
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364	30
31	31		90		151		212	243		304		365	31

[a]每年2月28号后天数比表中大1天．2012、2016、2020、2024都是闰年．

表5　现值1美元的复利 $s=(1+r)^n$ 的 s 值

n(年)	年利率 r				
	1%	1.5%	2%	2.5%	3%
1	1.0100 00	1.0150 00	1.0200 00	1.0250 00	1.0300 00
2	1.0202 00	1.0302 25	1.0404 00	1.0506 25	1.0609 00
3	1.0303 01	1.0456 78	1.0612 08	1.0768 91	1.0927 27
4	1.0406 04	1.0613 64	1.0824 32	1.1038 13	1.1255 09
5	1.0510 10	1.0772 84	1.1040 81	1.1314 08	1.1592 74
6	1.0615 20	1.0934 43	1.1261 62	1.1596 93	1.1940 52
7	1.0721 35	1.1098 45	1.1486 86	1.1886 86	1.2298 74
8	1.0828 57	1.1264 93	1.1716 59	1.2184 03	1.2667 70
9	1.0936 85	1.1433 90	1.1950 93	1.2488 63	1.3047 73
10	1.1046 22	1.1605 41	1.2189 94	1.2800 85	1.3439 16
11	1.1156 68	1.1779 49	1.2433 74	1.3120 87	1.3842 34
12	1.1268 25	1.1956 18	1.2682 42	1.3448 89	1.4257 61
13	1.1380 93	1.2135 52	1.2936 07	1.3785 11	1.4685 34
14	1.1494 74	1.2317 56	1.3194 79	1.4129 74	1.5125 90
15	1.1609 69	1.2502 32	1.3458 68	1.4482 98	1.5579 67
16	1.1725 79	1.2689 86	1.3727 86	1.4845 06	1.6047 06
17	1.1843 04	1.2880 20	1.4002 41	1.5216 18	1.6528 48
18	1.1961 47	1.3073 41	1.4282 46	1.5596 59	1.7024 33
19	1.2081 09	1.3269 51	1.4568 11	1.5986 50	1.7535 06
20	1.2201 90	1.3468 55	1.4859 47	1.6386 16	1.8061 11
21	1.2323 92	1.3670 58	1.5156 66	1.6795 82	1.8602 95
22	1.2447 16	1.3875 64	1.5459 80	1.7215 71	1.9161 03
23	1.2571 63	1.4083 77	1.5768 99	1.7646 11	1.9735 87
24	1.2697 35	1.4295 03	1.6084 37	1.8087 26	2.0327 94
25	1.2824 32	1.4509 45	1.6406 06	1.8539 44	2.0937 78
26	1.2952 56	1.4727 10	1.6734 18	1.9002 93	2.1565 91

（续）

n(年)	年利率 r				
	1%	1.5%	2%	2.5%	3%
27	1.3082 09	1.4948 00	1.7068 86	1.9478 00	2.2212 89
28	1.3212 91	1.5172 22	1.7410 24	1.9964 95	2.2879 28
29	1.3345 04	1.5399 81	1.7758 45	2.0464 07	2.3565 66
30	1.1478 49	1.5630 80	1.8113 62	2.0975 68	2.4272 62

n(年)	年利率 r				
	3.5%	4%	4.5%	5%	5.5%
1	1.0350 00	1.0400 00	1.0450 00	1.0500 00	1.0550 00
2	1.0712 25	1.0816 00	1.0920 25	1.1025 00	1.1130 25
3	1.1087 18	1.1248 64	1.1411 66	1.1576 25	1.1742 41
4	1.1475 23	1.1698 59	1.1925 19	1.2155 06	1.2388 25
5	1.1876 86	1.2166 53	1.2461 82	1.2762 82	1.3069 60
6	1.2292 55	1.2653 19	1.3022 60	1.3400 96	1.3788 43
7	1.2722 79	1.3159 32	1.3608 62	1.4071 00	1.4546 79
8	1.3168 09	1.3685 69	1.4221 01	1.4774 55	1.5346 87
9	1.3628 97	1.4233 12	1.4860 95	1.5513 28	1.6190 94
10	1.4105 99	1.4802 44	1.5529 69	1.6288 95	1.7081 44
11	1.4599 70	1.5394 54	1.6228 53	1.7103 39	1.8020 92
12	1.5110 69	1.6010 32	1.6958 81	1.7958 56	1.9012 07
13	1.5639 56	1.6650 74	1.7721 96	1.8856 49	2.0057 74
14	1.6186 95	1.7316 76	1.8519 45	1.9799 32	2.1160 91
15	1.6753 49	1.8009 44	1.9352 82	2.0789 28	2.2324 76
16	1.7339 86	1.8729 81	2.0223 70	2.1828 75	2.3552 63
17	1.7946 76	1.9479 01	2.1133 77	2.2920 18	2.4848 02
18	1.8574 89	2.0258 17	2.2084 79	2.4066 19	2.6214 66
19	1.9225 01	2.1068 49	2.3078 60	2.5269 50	2.7656 47
20	1.9897 89	2.1911 23	2.4117 14	2.6532 98	2.9177 57
21	2.0594 31	2.2787 68	2.5202 41	2.7859 63	3.0782 34
22	2.1315 12	2.3699 19	2.6336 52	2.9252 61	3.2475 37
23	2.2061 14	2.4647 16	2.7521 66	3.0715 24	3.4261 52
24	2.2833 28	2.5633 04	2.8760 14	3.2251 00	3.6145 90
25	2.3632 45	2.6658 36	3.0054 34	3.3863 55	3.8133 92
26	2.4459 59	2.7724 70	3.1406 79	3.5556 73	4.0231 29
27	2.5315 67	2.8833 69	3.2820 10	3.7334 56	4.2444 01
28	2.6201 72	2.9987 03	3.4297 00	3.9201 29	4.4778 43
29	2.7118 78	3.1186 51	3.5840 36	4.1161 36	4.7241 24
30	2.8067 94	3.2433 98	3.7453 18	4.3219 42	4.9839 51

n(年)	年利率 r				
	6%	6.5%	7%	7.5%	8%
1	1.0600 00	1.0650 00	1.0700 00	1.0750 00	1.0800 00
2	1.1236 00	1.1342 25	1.1449 00	1.1556 25	1.1664 00
3	1.1910 16	1.2079 50	1.2250 43	1.2422 97	1.2597 12
4	1.2624 77	1.2864 66	1.3107 96	1.3354 69	1.3604 89
5	1.3382 26	1.3700 87	1.4025 52	1.4356 29	1.4693 28

（续）

n(年)	年利率 r				
	6%	6.5%	7%	7.5%	8%
6	1.4185 19	1.4591 42	1.5007 30	1.5433 02	1.5868 74
7	1.5036 30	1.5539 87	1.6057 81	1.6590 49	1.7138 24
8	1.5938 48	1.6549 96	1.7181 86	1.7834 78	1.8509 30
9	1.6894 79	1.7625 70	1.8384 59	1.9172 39	1.9990 05
10	1.7908 48	1.8771 37	1.9671 51	2.0610 32	2.1589 25
11	1.8982 99	1.9991 51	2.1048 52	2.2156 09	2.3316 39
12	2.0121 96	2.1290 96	2.2521 92	2.3817 80	2.5181 70
13	2.1329 28	2.2674 88	2.4098 45	2.5604 13	2.7196 24
14	2.2609 04	2.4148 74	5.5785 34	2.7524 44	2.9371 94
15	2.3965 58	2.5718 41	2.7590 31	2.9588 77	3.1721 69
16	2.5403 52	2.7390 11	2.9521 64	3.1807 93	3.4259 43
17	2.6927 73	2.9170 46	3.1588 15	3.4193 53	3.7000 18
18	2.8543 39	3.1066 54	3.3799 32	3.6758 04	3.9960 20
19	3.0256 00	3.3085 87	3.6165 28	3.9514 89	4.3157 01
20	3.2071 35	3.5236 45	3.8696 84	4.2478 51	4.6609 57
21	3.3995 64	3.7526 82	4.1405 62	4.5664 40	5.0338 34
22	3.6035 37	3.9966 06	4.4304 02	4.9089 23	5.4365 40
23	3.8197 50	4.2563 86	4.7405 30	5.2770 92	5.8714 64
24	4.0489 35	4.5330 51	5.0723 67	5.6728 74	6.3411 81
25	4.2918 71	4.8276 99	5.4274 33	6.0983 40	6.8484 75
26	4.5493 83	5.1415 00	5.8073 53	6.5557 15	7.3963 53
27	4.8223 46	5.4756 97	6.2138 68	7.0473 94	7.9880 61
28	5.1116 87	5.8316 17	6.6488 38	7.5759 48	8.6271 06
29	5.4183 88	6.2106 72	7.1142 57	8.1441 44	9.3172 75
30	5.7434 91	6.6143 66	7.6122 55	8.7549 55	10.0626 57

n(年)	年利率 r			
	8.5%	9%	9.5%	10%
1	1.0850 00	1.0900 00	1.0950 00	1.1000 00
2	1.1772 25	1.1881 00	1.1990 25	1.2100 00
3	1.2772 89	1.2950 29	1.3129 32	1.3310 00
4	1.3858 59	1.4115 82	1.4376 61	1.4641 00
5	1.5036 57	1.5386 24	1.5742 39	1.6105 10
6	1.6314 68	2.6771 00	1.7237 91	1.7715 61
7	1.7701 42	1.8280 39	1.8875 52	1.9487 17
8	1.9206 04	1.9925 63	2.0668 69	2.1435 89
9	2.0838 56	2.1718 93	2.2632 21	2.3579 48
10	2.2609 83	2.3673 64	2.4782 28	2.5937 42
11	2.4531 67	2.5804 26	2.7136 59	2.8531 17
12	2.6616 86	2.8126 65	2.9714 57	3.1384 28
13	2.8879 30	3.0658 05	3.2537 45	3.4522 71

（续）

n(年)	年利率 r			
	8.5%	9%	9.5%	10%
15	3.1334 04	3.3417 27	3.5628 51	3.7974 98
15	3.3997 43	3.6424 82	3.9013 22	4.1772 48
16	3.6887 21	3.9703 06	4.2719 48	4.5949 73
17	4.0022 62	4.3276 33	4.6777 83	5.0544 70
18	4.3424 55	4.7171 20	5.1221 72	5.5599 17
19	4.7115 63	5.1416 61	5.6087 78	6.1159 09
20	5.1120 46	5.6044 11	6.1416 12	6.7275 00
21	5.5465 70	6.1088 08	6.7250 65	7.4002 50
22	6.0180 29	6.6586 00	7.3639 46	8.1402 75
23	6.5295 61	7.2578 74	8.0635 21	8.9543 02
24	7.0845 74	7.9110 83	8.8295 56	9.8497 33
25	7.6867 62	8.6230 81	9.6683 64	10.8347 06
26	8.3401 37	9.3991 58	10.5868 58	11.9181 77
27	9.0490 49	10.2450 82	11.5926 10	13.1099 94
28	9.8182 18	11.1671 40	12.6939 08	14.4209 94
29	10.6527 66	12.1721 82	13.8998 29	15.8630 93
30	11.5582 52	13.2676 78	15.2203 13	17.4494 02

表 6　1 美元复利的 $v^n(1+r)^{-n}$ = PVIF 值

n(年)	利率 r				
	1%	1.5%	2%	2.5%	3%
1	0.9900 99	0.9852 22	0.9803 92	0.9756 10	0.9708 74
2	0.9802 96	0.9706 62	0.9611 69	0.9518 14	0.9425 96
3	0.9705 90	0.9563 17	0.9423 22	0.9285 99	0.9151 42
4	0.9609 80	0.9421 84	0.9238 45	0.9059 51	0.8884 87
5	0.9514 66	0.9282 60	0.9057 31	0.8838 54	0.8626 09
6	0.9420 45	0.9145 42	0.8879 71	0.8622 97	0.8374 84
7	0.9327 18	0.9010 27	0.8705 60	0.8412 65	0.8130 92
8	0.9234 83	0.8877 11	0.8534 90	0.8207 47	0.7894 09
9	0.9143 40	0.8745 92	0.8367 55	0.8007 28	0.7664 17
10	0.9052 87	0.8616 67	0.8203 48	0.7811 98	0.7440 94
11	0.8963 24	0.8489 33	0.8042 63	0.7621 45	0.7224 21
12	0.8874 49	0.8363 87	0.7884 93	0.7435 56	0.7013 80
13	0.8786 63	0.8240 27	0.7730 32	0.7254 20	0.6809 51
14	0.8699 63	0.8118 49	0.7578 75	0.7077 27	0.6611 18
15	0.8613 49	0.7998 51	0.7430 15	0.6904 66	0.6418 62
16	0.8528 21	0.7880 31	0.7284 46	0.6736 25	0.6231 67
17	0.8443 77	0.7763 85	0.7141 63	0.6571 95	0.6050 16
18	0.8360 17	0.7649 12	0.7001 59	0.6411 66	0.5873 95

（续）

n(年)	利率 r				
	1%	1.5%	2%	2.5%	3%
19	0.8277 40	0.7536 07	0.6864 31	0.6255 28	0.5702 86
20	0.8195 44	0.7424 70	0.6729 71	0.6102 71	0.5536 76
21	0.8114 30	0.7314 98	0.6597 76	0.5953 86	0.5375 49
22	0.8033 96	0.7206 88	0.6468 39	0.5808 65	0.5218 93
23	0.7954 42	0.7100 37	0.6341 56	0.5666 97	0.5066 92
24	0.7875 66	0.6995 44	0.6271 21	0.5528 75	0.4919 34
25	0.7797 68	0.6892 06	0.6095 31	0.5393 91	0.4776 06
26	0.7720 48	0.6790 21	0.5975 79	0.5262 35	0.4636 95
27	0.7644 04	0.6689 86	0.5858 62	0.5134 00	0.4501 89
28	0.7568 36	0.6590 99	0.5743 75	0.5008 78	0.4370 77
29	0.7493 42	0.6493 59	0.5631 12	0.4886 61	0.4243 46
30	0.7419 23	0.6397 62	0.5520 71	0.4767 43	0.4119 87
31	0.7345 77	0.6303 08	0.5412 46	0.4651 15	0.3999 87
32	0.7273 04	0.6209 93	0.5306 33	0.4537 71	0.3883 37
33	0.7201 03	0.6118 16	0.5202 29	0.4427 03	0.3770 26
34	0.7129 73	0.6027 74	0.5100 28	0.4319 05	0.3660 45
35	0.7059 14	0.5938 66	0.5000 28	0.4213 71	0.3553 83
36	0.6989 25	0.5850 90	0.4902 23	0.4110 94	0.3450 32
37	0.6920 05	0.5764 43	0.4806 11	0.4010 67	0.3349 83
38	0.6851 53	0.5679 24	0.4711 87	0.3912 85	0.3252 26
39	0.6783 70	0.5595 31	0.4619 48	0.3817 41	0.3157 54
40	0.6716 53	0.5512 62	0.4528 90	0.3724 31	0.3065 57

n(年)	利率 r				
	3.5%	4%	4.5%	5%	5.5%
1	0.9661 84	0.9615 38	0.9569 38	0.9523 81	0.9478 67
2	0.9335 11	0.9245 56	0.9157 30	0.9070 29	0.8984 52
3	0.9019 43	0.8889 96	0.8762 97	0.8638 38	0.8516 14
4	0.8714 42	0.8548 04	0.8385 61	0.8227 02	0.8072 17
5	0.8419 73	0.8219 27	0.8024 51	0.7835 26	0.7651 34
6	0.8135 01	0.7903 15	0.7678 96	0.7462 15	0.7252 46
7	0.7859 91	0.7599 18	0.7348 28	0.7106 81	0.6874 37
8	0.7594 12	0.7306 90	0.7031 85	0.6768 39	0.6515 99
9	0.7337 31	0.7025 87	0.6729 04	0.6446 09	0.6176 29
10	0.7089 19	0.6755 64	0.6439 28	0.6139 13	0.5854 31
11	0.6849 46	0.6495 81	0.6161 99	0.5846 79	0.5549 11
12	0.6617 83	0.6245 97	0.5896 64	0.5568 37	0.5259 82
13	0.6394 04	0.6005 74	0.5642 72	0.5303 21	0.4985 61
14	0.6177 82	0.5774 75	0.5399 73	0.5050 68	0.4725 69
15	0.5968 91	0.5552 65	0.5167 20	0.4810 17	0.4479 33
16	0.5767 06	0.5339 08	0.4944 69	0.4581 12	0.4245 81

（续）

n(年)	利率 r				
	3.5%	4%	4.5%	5%	5.5%
17	0.5572 04	0.5133 73	0.4731 76	0.4362 97	0.4024 47
18	0.5383 61	0.4936 28	0.4528 00	0.4155 21	0.3814 66
19	0.5201 56	0.4746 42	0.4333 02	0.3957 34	0.3615 79
20	0.5025 66	0.4563 87	0.4146 43	0.3768 89	0.3427 29
21	0.4855 71	0.4388 34	0.3967 87	0.3589 42	0.3248 62
22	0.4691 51	0.4219 55	0.3797 01	0.3418 50	0.3079 26
23	0.4532 86	0.4057 26	0.3633 50	0.3255 71	0.2918 73
24	0.4379 57	0.3901 21	0.3477 03	0.3100 68	0.2766 57
25	0.4231 47	0.3751 17	0.3327 31	0.2953 03	0.2622 34
26	0.4088 38	0.3606 89	0.3184 02	0.2812 41	0.2485 63
27	0.3950 12	0.3468 17	0.3046 91	0.2678 48	0.2356 05
28	0.3816 54	0.3334 77	0.2915 71	0.2550 94	0.2233 22
29	0.3687 48	0.3206 51	0.2790 15	0.2429 46	0.2116 79
30	0.3562 78	0.3083 19	0.2670 00	0.2313 77	0.2006 44
31	0.3442 30	0.2964 60	0.2555 02	0.2203 59	0.1901 84
32	0.3325 90	0.2850 58	0.2445 00	0.2098 66	0.1802 69
33	0.3213 43	0.2740 94	0.2339 71	0.1998 73	0.1708 71
34	0.3104 76	0.2635 52	0.2238 96	0.1903 55	0.1619 63
35	0.2999 77	0.2534015	0.2142 54	0.1812 90	0.1535 20
36	0.2898 33	0.2436 69	0.2050 28	0.1726 57	0.1455 16
37	0.2800 32	0.2342 97	0.1961 99	0.1644 36	0.1379 30
38	0.2705 62	0.2252 85	0.1877 50	0.1566 05	0.1307 39
39	0.2614 13	0.2166 21	0.1796 65	0.1494 48	0.1239 24
40	0.2525 72	0.2082 89	0.1719 29	0.1420 46	0.1174 63

n(年)	利率 r				
	6%	6.5%	7%	7.5%	8%
1	0.9433 96	0.9389 67	0.9345 79	0.9302 33	0.9259 26
2	0.8899 96	0.8816 59	0.8734 39	0.8653 33	0.8573 39
3	0.8396 19	0.8278 49	0.8162 98	0.8049 61	0.7938 32
4	0.7920 94	0.7773 23	0.7628 95	0.7488 01	0.7350 30
5	0.7472 58	0.7298 81	0.7129 86	0.6965 59	0.6805 83
6	0.7049 61	0.6853 34	0.6663 42	0.6479 62	0.6301 70
7	0.6650 57	0.6435 06	0.6227 50	0.6027 55	0.5834 90
8	0.6274 12	0.6042 31	0.5820 09	0.5607 02	0.5402 69
9	0.5918 98	0.5673 53	0.5439 34	0.5215 83	0.5002 49
10	0.5583 95	0.5327 26	0.5083 49	0.4851 94	0.4631 93
11	0.5267 88	0.5002 12	0.4750 93	0.4513 43	0.4288 83
12	0.4969 69	0.4696 83	0.4440 12	0.4198 54	0.3971 14
13	0.4688 39	0.4410 17	0.4149 64	0.3905 62	0.3676 98
14	0.4423 01	0.4141 00	0.3878 17	0.3633 13	0.3404 61

（续）

n(年)	利率 r				
	6%	6.5%	7%	7.5%	8%
15	0.4172 65	0.3888 27	0.3624 46	0.3379 66	0.3152 42
16	0.3936 46	0.3650 95	0.3387 35	0.3143 87	0.2918 90
17	0.3713 64	0.3428 13	0.3165 74	0.2924 53	0.2702 69
18	0.3503 44	0.3218 90	0.2958 64	0.2720 49	0.2502 49
19	0.3305 13	0.3022 44	0.2765 08	0.2530 69	0.2317 12
20	0.3118 05	0.2837 97	0.2584 19	0.2354 13	0.2145 48
21	0.2941 55	0.2664 76	0.2415 13	0.2189 89	0.1986 56
22	0.2775 05	0.2502 12	0.2257 13	0.2037 11	0.1839 41
23	0.2617 97	0.2349 41	0.2109 47	0.1894 98	0.1703 15
24	0.2469 79	0.2206 02	0.1971 47	0.1762 77	0.1576 99
25	0.2329 99	0.2071 38	0.1842 49	0.1639 79	0.1460 18
26	0.2198 10	0.1944 96	0.1721 95	0.1525 39	0.1352 02
27	0.2073 68	0.1826 25	0.1609 30	0.1418 96	0.1251 87
28	0.1956 30	0.1714 79	0.1504 02	0.1319 97	0.1159 14
29	0.1845 57	0.1610 13	0.1405 63	0.1227 88	0.1073 28
30	0.1741 10	0.1511 86	0.1313 67	0.1142 21	0.0993 77
31	0.1642 55	0.1419 59	0.1227 73	0.1062 52	0.0920 16
32	0.1549 57	0.1332 95	0.1147 41	0.0988 39	0.0852 00
33	0.1461 86	0.1251 59	0.1072 35	0.0919 43	0.0788 89
34	0.1379 12	0.1175 20	0.1002 19	0.0855 29	0.0730 45
35	0.1301 06	0.1103 48	0.0936 63	0.0795 62	0.0676 35
36	0.1227 41	0.1036 13	0.0875 35	0.0740 11	0.0626 25
37	0.1157 93	0.0972 89	0.0818 09	0.0688 47	0.0579 86
38	0.1092 39	0.0913 51	0.0764 57	0.0640 44	0.0536 90
39	0.1030 56	0.0857 76	0.0714 55	0.0595 76	0.0497 13
40	0.0972 22	0.0805 41	0.0667 80	0.0554 19	0.0460 31

n(年)	利率 r			
	8.5%	9%	9.5%	10%
1	0.9216 59	0.9174 31	0.9132 42	0.9090 91
2	0.8494 55	0.8416 80	0.8340 11	0.8264 46
3	0.7829 08	0.7721 83	0.7616 54	0.7513 15
4	0.7215 74	0.7084 25	0.6955 74	0.6830 13
5	0.6650 45	0.6499 31	0.6352 28	0.6209 21
6	0.6129 45	0.5962 67	0.5801 17	0.5644 74
7	0.5649 26	0.5470 34	0.5297 87	0.5131 58
8	0.5206 69	0.5018 66	0.4838 24	0.4665 07
9	0.4798 80	0.4604 28	0.4418 48	0.4240 98
10	0.4422 85	0.4224 11	0.4035 14	0.3855 43
11	0.4076 36	0.3875 33	0.3685 06	0.3504 94
12	0.3757 02	0.3555 35	0.3365 35	0.3186 31

（续）

n(年)	利率 r			
	8.5%	9%	9.5%	10%
13	0.3462 69	0.3261 79	0.3073 38	0.2896 64
14	0.3191 42	0.2992 46	0.2806 74	0.2633 31
15	0.2941 40	0.2745 38	0.2563 23	0.2393 92
16	0.2710 97	0.2518 70	0.2340 85	0.2176 29
17	0.2498 59	0.2310 73	0.2137 77	0.1978 45
18	0.2302 85	0.2119 94	0.1952 30	0.1798 59
19	0.2122 44	0.1944 90	0.1782 92	0.1635 08
20	0.1956 16	0.1784 31	0.1628 24	0.1486 44
21	0.1802 92	0.1636 98	0.1486 97	0.1351 31
22	0.1661 67	0.1501 82	0.1357 97	0.1228 46
23	0.1531 50	0.1377 81	0.1240 15	0.1116 78
24	0.1411 52	0.1264 05	0.1132 56	0.1015 26
25	0.1300 94	0.1159 68	0.1034 30	0.0922 96
26	0.1199 02	0.1063 93	0.0944 57	0.0839 05
27	0.1105 09	0.0976 08	0.0862 62	0.0762 78
28	0.1018 51	0.0895 48	0.0787 78	0.0693 43
29	0.0938 72	0.0821 54	0.0719 43	0.0630 39
30	0.0865 18	0.0753 71	0.0657 02	0.0573 09
31	0.0797 40	0.0691 48	0.0600 02	0.0520 99
32	0.0734 93	0.0634 38	0.0547 96	0.0473 62
33	0.0677 36	0.0582 00	0.0500 42	0.0430 57
34	0.0624 29	0.0533 95	0.0457 00	0.0391 43
35	0.0575 39	0.0489 86	0.0417 36	0.0355 84
36	0.0530 31	0.0449 41	0.0381 15	0.0323 49
37	0.0488 76	0.0412 31	0.0348 08	0.0294 08
38	0.0450 47	0.0378 26	0.0317 88	0.0267 35
39	0.0415 18	0.0347 03	0.0290 30	0.0243 04
40	0.0382 66	0.0318 38	0.0265 12	0.0220 95

表 7　1 美元一个周期支付的 $s_{\overline{n}|r}=\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$ 值

n(年)	利率 r				
	1%	1.5%	2%	2.5%	3%
1	1.0000 00	1.0000 00	1.0000 00	1.0000 00	1.0000 00
2	2.0100 00	2.0150 00	2.0200 00	2.0250 00	2.0300 00
3	3.0301 00	3.0452 25	3.0604 00	3.0756 25	3.0909 00
4	4.0604 01	4.0909 03	4.1216 08	4.1525 16	4.1836 27
5	5.1010 05	5.1522 67	5.2040 40	5.2563 29	5.3091 36
6	6.1520 15	6.2295 51	6.3081 21	6.3877 37	6.4684 10
7	7.2135 35	7.3229 94	7.4342 83	7.5474 30	7.6624 62

（续）

n(年)	利率 r				
	1%	1.5%	2%	2.5%	3%
8	8.2856 71	8.4328 39	8.5829 69	8.7361 16	8.8923 36
9	9.3685 27	9.5593 32	9.7546 28	9.9545 19	10.1591 06
10	10.4622 13	10.7027 22	10.9497 21	11.2033 82	11.4638 79
11	11.5668 35	11.8632 62	12.1687 15	12.4834 66	12.8077 96
12	12.6825 03	13.0412 11	13.4120 90	13.7955 53	14.1920 30
13	13.8093 28	14.2368 30	14.6803 32	15.1404 42	15.6177 90
14	14.9474 21	15.4503 82	15.9739 38	16.5189 53	17.0863 24
15	16.0968 96	16.6821 38	17.2934 17	17.9319 27	18.5989 14
16	17.2578 64	17.9323 70	18.6392 85	19.3802 25	20.1568 81
17	18.4304 43	19.2013 55	20.0120 71	20.8647 30	21.7615 88
18	19.6147 48	20.4893 76	21.4123 12	22.3863 49	23.4144 35
19	20.8108 95	21.7967 16	22.8405 59	23.9460 07	25.1168 68
20	22.0190 04	23.1236 67	24.2973 70	25.5446 58	26.8703 74
21	23.2391 94	24.4705 22	25.7833 17	27.1832 74	28.6764 86
22	24.4715 86	25.8375 80	27.2989 84	28.8628 56	30.5367 80
23	25.7163 02	27.2251 44	28.8449 63	30.5844 27	32.4528 84
24	26.9734 65	28.6335 21	30.4218 62	32.3479 38	34.4264 70
25	28.2432 00	30.0630 24	32.0303 00	34.1577 64	36.4592 64
26	29.5256 32	31.5139 69	33.6709 06	36.0117 08	38.5530 42
27	30.8208 88	32.9866 79	35.3443 24	37.9120 01	40.7096 34
28	32.1290 97	34.4814 79	37.0512 10	39.8598 01	42.9309 23
29	33.4503 88	35.9987 01	38.7922 35	41.8562 96	45.2188 50
30	34.7848 92	37.5386 81	40.5680 79	43.9027 03	47.5754 16
31	36.1327 40	39.1017 62	42.3794 41	46.0002 71	50.0026 78
32	37.4940 68	40.6882 88	44.2270 30	48.1502 78	52.5027 59
33	38.8690 09	42.2986 12	46.1115 70	50.3540 34	55.0778 41
34	40.2576 99	43.9330 92	48.0338 02	52.6128 85	57.7301 77
35	41.6602 76	45.5920 88	49.9944 78	54.9282 07	60.4620 82
36	43.0768 78	47.2759 69	51.9943 67	57.3014 13	63.2759 44
37	44.5076 47	48.9851 09	54.0342 55	59.7339 48	66.1742 23
38	45.9527 24	50.7198 85	56.1149 40	62.2272 97	69.1594 49
39	47.4122 51	52.4806 84	58.2372 38	64.7829 79	72.2342 33
40	48.8863 73	54.2678 94	60.4019 83	67.4025 54	75.4012 60

n(年)	利率 r				
	3.5%	4%	4.5%	5%	5.5%
1	1.0000 00	1.0000 00	1.0000 00	1.0000 00	1.0000 00
2	2.0350 00	2.0400 00	2.0450 00	2.0500 00	2.0550 00
3	3.1062 25	3.1216 00	3.1370 25	3.1525 00	3.1680 25
4	4.2149 43	4.2464 64	4.2781 91	4.3101 25	4.3422 66
5	5.3624 66	5.4163 23	5.4707 10	5.5256 31	5.5810 91

（续）

n(年)	利率 r				
	3.5%	4%	4.5%	5%	5.5%
6	6.5501 52	6.6329 75	6.7168 92	6.8019 13	6.8880 51
7	7.7794 08	7.8982 94	8.0191 52	8.1420 08	8.2668 94
8	9.0516 87	9.2142 26	9.3800 14	9.5491 09	9.7215 73
9	10.3684 96	10.5827 95	10.8021 14	11.0265 64	11.2562 60
10	11.7313 93	12.0061 07	12.2882 09	12.5778 93	12.8753 54
11	13.1419 92	13.4863 51	13.8411 79	14.2067 87	14.5834 98
12	14.6019 62	15.0258 05	15.4640 32	15.9171 27	16.3855 91
13	16.1130 30	16.6268 38	17.1599 13	17.7129 83	18.2867 98
14	17.6769 86	18.2919 11	18.9321 09	19.5986 32	20.2925 72
15	19.2956 81	20.0235 88	20.7840 54	21.5785 64	22.4086 64
16	20.9710 30	21.8245 31	22.7193 37	23.6574 92	24.6411 40
17	22.7050 16	23.6975 12	24.7417 07	25.8403 66	26.9964 03
18	24.4996 91	25.6454 13	26.8550 84	28.1323 85	29.4812 05
19	26.3571 81	27.6712 29	29.0635 62	30.5390 04	32.1026 71
20	28.2796 82	29.7780 79	31.3714 23	33.0659 54	34.8683 18
21	30.2694 71	31.9692 02	33.7831 37	35.7192 52	37.7860 76
22	32.3289 02	34.2479 70	36.3033 78	38.5052 14	40.8643 10
23	34.4604 14	36.6178 89	38.9370 30	41.4304 75	44.1118 47
24	36.6665 28	39.0826 04	41.6891 96	44.5019 99	47.5379 98
25	38.9498 57	41.6459 08	44.5652 10	47.7270 99	51.1525 88
26	41.3131 02	44.3117 45	47.5706 45	51.1134 54	54.9659 81
27	43.7590 60	47.0842 14	50.7113 24	54.6691 26	58.9891 09
28	46.2906 27	49.9675 83	53.9933 33	58.4025 83	63.2335 10
29	48.9107 99	52.9662 86	57.4230 33	62.3227 12	67.7113 54
30	51.6226 77	56.0849 38	61.0070 70	66.4388 48	72.4354 78
31	54.4294 71	59.3283 35	64.7523 88	70.7607 90	77.4194 29
32	57.3345 02	62.7014 69	68.6662 45	75.2988 29	82.6774 98
33	60.3412 10	66.2095 27	72.7562 26	80.0637 71	88.2247 60
34	63.4531 52	69.8579 09	77.0302 56	85.0669 59	94.0771 22
35	66.6740 13	73.6522 25	81.4966 18	90.3203 07	100.2513 64
36	70.0076 03	77.5983 13	86.1639 66	95.8363 23	106.7651 89
37	73.4578 69	81.7022 46	91.0413 44	101.6281 39	113.6372 74
38	77.0288 95	85.9703 36	96.1382 05	107.7095 46	120.8873 24
39	80.7249 06	90.4091 50	101.4644 24	114.0950 23	128.5361 27
40	84.5502 78	95.0255 16	107.0303 23	120.7997 74	136.6056 14

n(年)	利率 r				
	6%	6.5%	7%	7.5%	8%
1	1.0000 00	1.0000 00	1.0000 00	1.0000 00	1.0000 00
2	2.0600 00	2.0650 00	2.0700 00	2.0750 00	2.0800 00
3	3.1836 00	3.1992 25	3.2149 00	3.2306 25	3.2464 00

（续）

n(年)	利率 r				
	6%	6.5%	7%	7.5%	8%
4	4.3746 16	4.4071 75	4.4399 43	4.4729 22	4.5061 12
5	5.6370 93	5.6936 41	5.7507 39	5.8083 91	5.8666 01
6	6.9753 19	7.0637 28	7.1532 91	7.2440 20	7.3359 29
7	8.3938 38	8.5228 70	8.6540 21	8.7873 22	8.9228 03
8	9.8974 68	10.0768 56	10.2598 03	10.4463 71	10.6366 28
9	11.4913 16	11.7318 52	11.9779 89	12.2298 49	12.4875 58
10	13.1807 95	13.4944 23	13.8164 48	14.1470 88	14.4865 62
11	14.9716 43	15.3715 60	15.7835 99	16.2081 19	16.6454 87
12	16.8699 41	17.3707 11	17.8884 51	18.4237 28	18.9771 26
13	18.8821 38	19.4998 08	20.1406 43	20.8055 08	21.4952 97
14	21.0150 66	21.7672 95	22.5504 88	23.3659 21	24.2149 20
15	23.2759 70	24.1821 69	25.1290 22	26.1183 65	27.1521 14
16	25.6725 28	26.7540 10	27.8880 54	29.0772 42	30.3242 83
17	28.2128 80	29.4930 21	30.8402 17	32.2580 35	33.7502 26
18	30.9056 53	32.4100 67	33.9990 33	35.6773 88	37.4502 44
19	33.7599 92	35.5167 22	37.3789 65	39.3531 92	41.4462 63
20	36.7855 91	38.8253 09	40.9954 92	43.3046 81	45.7619 64
21	39.9927 27	42.3489 54	44.8651 77	47.5525 32	50.4229 21
22	43.3922 90	46.1016 36	49.0057 39	52.1189 72	55.4567 55
23	46.9958 28	50.0982 42	53.4361 41	57.0278 95	60.8932 96
24	50.8155 77	54.3546 28	58.1766 71	62.3049 87	66.7647 59
25	54.8645 12	58.8876 79	63.2490 38	67.9778 62	73.1059 40
26	59.1563 83	63.7153 78	68.6764 70	74.0762 01	79.9544 15
27	63.7057 66	68.8568 77	74.4838 23	80.6319 16	87.3507 68
28	68.5281 12	74.3325 74	80.6976 91	87.6793 10	95.3388 30
29	73.6397 98	80.1641 92	87.3465 29	95.2552 58	103.9659 36
30	79.0581 86	86.3748 64	94.4607 86	103.3994 03	113.2832 11
31	84.8016 77	92.9892 30	102.0730 41	112.1543 58	123.3458 68
32	90.8897 78	100.0335 30	110.2181 54	121.5659 35	134.2135 37
33	97.3431 65	107.5357 10	118.9334 25	131.6833 80	145.9506 20
34	104.1837 55	115.5255 31	128.2587 65	142.5596 33	158.6266 70
35	111.4347 80	124.0346 90	138.2368 78	154.2516 06	172.3168 04
36	119.1208 67	133.0969 45	148.9134 60	166.8204 76	187.1021 48
37	127.2681 19	142.7482 47	160.3374 02	180.3320 12	203.0703 20
38	135.9042 06	153.0268 83	172.5610 20	194.8569 13	220.3159 45
39	145.0584 58	163.9736 30	185.6402 92	210.4711 81	238.9412 21
40	154.7619 66	175.6319 16	199.6351 12	227.2565 20	259.0565 19

n(年)	利率 r			
	8.5%	9%	9.5%	10%
1	1.0000 00	1.0000 00	1.0000 00	1.0000 00
2	2.0850 00	2.0900 00	2.0950 00	2.1000 00

（续）

n(年)	利率 r			
	8.5%	9%	9.5%	10%
3	3.2622 25	3.2781 00	3.2940 25	3.3100 00
4	4.5395 14	4.5731 29	4.6069 57	4.6410 00
5	5.9253 73	5.9847 11	6.0446 18	6.1051 00
6	7.4290 30	7.5233 35	7.6188 57	7.7156 10
7	9.0604 97	9.2004 35	9.3426 48	9.4871 71
8	10.8306 39	11.0284 74	11.2302 00	11.4358 88
9	12.7512 44	13.0210 37	13.2970 69	13.5794 77
10	14.8350 99	15.1929 30	15.5602 91	15.9374 25
11	17.0960 83	17.5602 93	18.0385 18	18.5311 67
12	19.5492 50	20.1407 20	20.7521 78	21.3842 84
13	22.2109 36	22.9533 85	23.7236 34	24.5227 12
13	25.0988 66	26.0191 89	26.9773 80	27.9749 83
15	28.2322 69	29.3609 16	30.5402 31	31.7724 82
16	31.6320 12	33.0033 99	34.4415 53	35.9497 30
17	35.3207 33	36.9737 05	38.7135 00	40.5447 03
18	39.3229 95	41.3013 38	43.3912 83	45.5991 73
19	43.6654 50	46.0184 58	48.5134 55	51.1590 90
20	48.3770 13	51.1601 20	54.1222 33	57.2749 99
21	53.4890 59	56.7645 30	60.2638 45	64.0024 99
22	59.0356 29	62.8733 38	66.9889 10	71.4027 49
23	65.0536 58	69.5319 39	74.3528 56	79.5430 24
24	71.5832 19	76.7898 13	82.4163 78	88.4973 27
25	78.6677 92	84.7008 96	91.2459 34	98.3470 59
26	86.3545 55	93.3239 77	100.9142 97	109.1817 65
27	94.6946 92	102.7231 35	111.5011 56	121.0999 42
28	103.7437 41	112.9682 17	123.0937 66	134.2099 36
29	113.5619 59	124.1353 56	135.7876 73	148.6309 30
30	124.2147 25	136.3075 39	149.6875 02	164.4940 23
31	135.7729 77	149.5752 17	164.9078 15	181.9434 25
32	148.3136 80	164.0369 87	181.5740 57	210.1377 67
33	161.9203 43	179.8003 15	199.8235 93	222.2515 44
34	176.6835 72	196.9823 44	219.8068 34	245.4766 99
35	192.7016 75	215.7107 55	241.6884 83	271.0243 68
36	210.0813 18	236.1247 23	265.6488 89	299.1268 05
37	228.9382 30	258.3759 48	291.8855 34	330.0394 86
38	249.3979 79	282.6297 83	320.6146 59	364.0434 34
39	271.5968 08	309.0664 63	352.0730 52	401.4477 78
40	295.6825 36	337.8824 45	386.5199 92	442.5925 56

表 8　1 美元一个周期支付的 $a_{\overline{n}|r} = \frac{a-(1+r)^{-n}}{r}$ = $PVIFA_{r,n}$ 值

n(年)	利率 r				
	1%	1.5%	2%	2.5%	3%
1	0.9900 99	0.9852 22	0.9803 92	0.9756 10	0.9708 74
2	1.9703 95	1.9558 83	1.9415 61	1.9274 24	1.9134 70
3	2.9409 85	2.9122 00	2.8838 83	2.8560 24	2.8286 11
4	3.9019 66	3.8543 85	3.8077 29	3.7619 74	3.7170 98
5	4.8534 31	4.7826 45	4.7134 60	4.6458 29	4.5797 07
6	5.7954 76	5.6971 87	5.6014 31	5.5081 25	5.4171 91
7	6.7281 95	6.5982 14	6.4719 91	6.3493 91	6.2302 83
8	7.6516 78	7.4859 25	7.3254 81	7.1701 37	7.0196 92
9	8.5660 18	8.3605 17	8.1622 37	7.9708 66	7.7861 09
10	9.4713 05	9.2221 85	8.9825 85	8.7520 64	8.5302 03
11	10.3676 28	10.0711 18	9.7868 48	9.5142 09	9.2526 24
12	11.2550 77	10.9075 05	10.5753 41	10.2577 65	9.9540 04
13	12.1337 40	11.7315 32	11.3483 74	10.9831 85	10.6349 55
14	13.0037 03	12.5433 82	12.1062 49	11.6909 12	11.2960 73
15	13.8650 52	13.3432 33	12.8492 64	12.3813 78	11.9379 35
16	14.7178 74	14.1312 64	13.5777 09	13.0550 03	12.5611 02
17	15.5622 51	14.9076 49	14.2918 72	13.7121 98	13.1661 18
18	16.3982 69	15.6725 61	14.9920 31	14.3533 64	13.7535 13
19	17.2260 09	16.4261 68	15.6784 62	14.9788 91	14.3237 99
20	18.0455 53	17.1686 39	16.3514 33	15.5891 62	14.8774 75
21	18.8569 83	17.9001 37	17.0112 09	16.1845 49	15.4150 24
22	19.6603 79	18.6208 24	17.6580 48	16.7654 13	15.9369 17
23	20.4558 21	19.3308 61	18.2922 04	17.3321 10	16.4436 08
24	21.2433 87	20.0304 05	18.9039 26	17.8849 86	16.9355 42
25	22.0231 56	20.7196 11	19.5234 56	18.4243 76	17.4131 48
26	22.7952 04	21.3986 32	20.1210 44	18.9506 11	17.8768 42
27	23.5596 08	22.0676 17	20.7068 98	19.4640 11	18.3270 31
28	24.3164 43	22.7267 17	21.2812 72	19.9648 89	18.7641 08
29	25.0657 85	23.3760 76	21.8443 85	20.4535 50	19.1884 55
30	25.8077 08	24.0158 38	22.3964 56	20.9302 93	19.6004 41
31	26.5422 85	24.6461 46	22.9377 02	21.3954 07	20.0004 28
32	27.2695 89	25.2671 39	23.4683 35	21.8491 78	20.3887 66
33	27.9896 93	25.8789 54	23.9885 64	22.2918 81	20.7657 92
34	28.7026 66	26.4817 28	24.4985 92	22.7237 86	21.1318 37
35	29.4085 80	27.0755 95	24.9986 19	23.1451 57	21.4872 20
36	30.1075 05	27.6606 84	25.4888 42	23.5562 51	21.8322 53
37	30.7995 10	28.2371 27	25.9694 53	23.9573 18	22.1672 35
38	31.4846 63	28.8050 52	26.4406 41	24.3486 03	22.4924 62
39	32.1630 33	29.3645 83	26.9025 89	24.7303 44	22.8082 15

（续）

n(年)	利率 r				
	1%	1.5%	2%	2.5%	3%
40	32.8346 86	29.9158 45	27.3554 79	25.1027 75	23.1147 72
41	33.4996 89	30.4589 61	27.7994 89	25.4661 22	23.4124 00
42	34.1581 08	30.9940 50	28.2347 94	25.8206 07	23.7013 59
43	34.8100 08	31.5212 32	28.6615 62	26.1664 46	23.9819 02
44	35.4554 53	32.0406 22	29.0799 63	26.5038 49	24.2542 74
45	36.0945 08	32.5523 37	29.4901 60	26.8330 24	25.5187 13
46	36.7272 36	33.0564 90	29.8923 14	27.1541 70	24.7754 49
47	37.3536 99	33.5531 92	30.2865 82	27.4674 83	25.0247 08
48	37.9739 59	34.0425 54	30.6731 20	27.7731 54	25.2667 07
49	38.5880 79	34.5246 83	31.0520 78	28.0713 69	25.5016 57
50	39.1961 18	34.9996 88	31.4236 06	28.3623 12	25.7297 64

n(年)	利率 r				
	3.5%	4%	4.5%	5%	5.5%
1	0.9661 84	0.9615 38	0.9569 38	0.9523 81	0.9478 67
2	1.8996 94	1.8860 95	1.8726 68	1.8594 10	1.8463 20
3	2.8016 37	2.7750 91	2.7489 64	2.7232 48	2.6979 33
4	3.6730 79	3.6298 95	3.5875 26	3.5459 51	3.5051 50
5	4.5150 52	4.4518 22	4.3899 77	4.3294 77	4.2702 84
6	5.3285 53	5.2421 37	5.1578 72	5.0756 92	4.9955 30
7	6.1145 44	6.0020 55	5.8927 01	5.7863 73	5.6829 67
8	6.8739 56	6.7327 45	6.5958 86	6.4632 13	6.3345 66
9	7.6076 87	7.4353 32	7.2687 91	7.1078 22	6.9521 95
10	8.3166 05	8.1108 96	7.9127 18	7.7217 35	7.5376 26
11	9.0015 51	8.7604 77	8.5289 17	8.3604 14	8.0925 36
12	9.6633 34	9.3850 74	9.1185 81	8.8632 52	8.6185 18
13	10.3027 38	9.9856 48	9.6828 52	9.3935 73	9.1170 79
14	10.9205 20	10.5631 23	10.2228 25	9.8986 41	9.5896 48
15	11.5274 11	11.1183 87	10.7395 46	10.3796 58	10.0375 81
16	12.0941 17	11.6522 96	11.2340 15	10.8377 70	10.4621 62
17	12.6513 21	12.1656 69	11.7071 91	11.2740 66	10.8646 09
18	13.1896 82	12.6592 97	12.1599 92	11.6895 87	11.2460 74
19	13.7098 37	13.1339 39	12.5932 94	12.0853 21	11.6076 54
20	14.2124 03	13.5903 26	13.0079 36	12.4622 10	11.9503 82
21	14.6979 74	14.0291 60	13.4047 24	12.8211 53	12.2752 44
22	15.1671 25	14.4511 15	13.7844 25	13.1630 03	12.5831 70
23	15.6204 10	14.8568 42	14.1477 75	13.4885 74	12.8750 42
24	16.0583 68	15.2469 63	14.4954 78	13.7986 42	13.1516 99
25	16.4815 15	15.6220 80	14.8282 09	14.0939 45	13.4139 33
26	16.8903 52	15.9827 69	15.1466 11	14.3751 85	13.6624 95
27	17.2853 65	16.3295 86	15.4513 03	14.6430 34	13.8981 00

（续）

n(年)	利率 r				
	3.5%	4%	4.5%	5%	5.5%
28	17.6670 19	16.6630 63	15.7428 74	14.8981 27	14.1214 22
29	18.0357 67	16.9837 15	16.0218 89	15.1410 74	14.3331 01
30	18.3920 45	17.2920 33	16.2888 89	15.3724 51	14.5337 45
31	18.7362 76	17.5884 94	16.5443 91	15.5928 11	14.7239 29
32	19.0688 65	17.8735 52	16.7888 91	15.8026 77	14.9041 98
33	19.3902 08	18.1476 46	17.0228 62	16.0025 49	15.0750 69
34	19.7006 84	18.4111 98	17.2467 58	16.1929 04	15.2370 33
35	20.0006 61	18.6646 13	17.4610 12	16.3741 94	15.3905 52
36	20.2904 94	18.9082 82	17.6660 41	16.5468 52	15.5360 68
37	20.5705 25	19.1425 79	17.8622 40	16.7112 87	15.6739 98
38	20.8410 87	19.3678 64	18.0499 90	16.8678 93	15.8047 38
39	21.1025 00	19.5844 85	18.2296 56	17.0170 41	15.9286 62
40	21.3550 72	19.7927 74	18.4015 84	17.1590 86	16.0461 25
41	21.5991 04	19.9930 52	18.5661 09	17.2943 68	16.1574 64
42	21.8348 83	20.1856 27	18.7235 50	17.4232 08	16.2629 99
43	22.0626 89	20.3707 95	18.8742 10	17.5459 12	16.3630 32
44	22.2827 91	20.5488 41	19.0183 83	17.6627 73	16.4578 51
45	22.4954 50	20.7200 40	19.1563 47	17.7740 70	16.5477 26
46	22.7009 18	20.8846 54	19.2883 71	17.8800 67	16.6329 15
47	22.8994 38	21.0429 36	19.4147 09	17.9810 16	16.7136 64
48	23.0912 44	21.1951 31	19.5356 07	18.0771 58	16.7902 03
49	23.2765 65	21.3414 72	19.6512 98	18.1687 22	16.8627 51
50	23.4556 18	21.4821 85	19.7620 08	18.2559 25	16.9315 18

n(年)	利率 r				
	6%	6.5%	7%	7.5%	8%
1	0.9433 96	0.9389 67	0.9345 79	0.9302 33	0.9259 26
2	1.8333 93	1.8206 26	1.8080 18	1.7955 65	1.7832 65
3	2.6730 12	2.6484 76	2.6243 16	2.6005 26	2.5770 97
4	3.4651 06	3.4257 99	3.3872 11	3.3493 26	3.3121 27
5	4.2123 64	4.1556 79	4.1001 97	4.0458 85	3.9927 10
6	4.9173 24	4.8410 14	4.7665 40	4.6938 46	4.6228 80
7	5.5823 81	5.4845 20	5.3892 89	5.2966 01	5.2063 70
8	6.2097 94	6.0887 51	5.9712 99	5.8573 04	5.7466 39
9	6.8016 92	6.6561 04	6.5152 32	6.3788 87	6.2468 88
10	7.3600 87	7.1888 30	7.0235 82	6.8640 81	6.7100 81
11	7.8868 75	7.6890 42	7.4986 74	7.3154 24	7.1389 64
12	8.3838 44	8.1587 25	7.9426 86	7.7352 78	7.5360 78
13	8.8526 83	8.5997 42	8.3576 51	8.1258 40	7.9037 76
14	9.2949 84	9.0138 42	8.7454 68	8.4891 54	8.2442 37
15	9.7122 49	9.4026 69	9.1079 14	8.8271 20	8.5594 79

（续）

n(年)	利率 r				
	6%	6.5%	7%	7.5%	8%
16	10.1058 95	9.7677 64	9.4466 49	9.1415 07	8.8513 69
17	10.4772 60	10.1105 77	9.7632 23	9.4339 60	9.1216 38
18	10.8276 03	10.4324 66	10.0590 87	9.7060 09	9.3718 87
19	11.1581 16	10.7347 10	10.3355 95	9.9590 78	9.6035 99
20	11.4699 21	11.0185 07	10.5940 14	10.1944 91	9.8181 47
21	11.7640 77	11.2849 83	10.8355 27	10.4134 80	10.0168 03
22	12.0415 82	11.5351 96	11.0612 41	10.6171 91	10.2007 44
23	12.3033 79	11.7701 37	11.2721 87	10.8066 89	10.3710 59
24	12.5503 58	11.9907 39	11.4693 34	10.9829 67	10.5287 58
25	12.7833 56	12.1978 77	11.6535 83	11.1469 46	10.6747 76
26	13.0031 66	12.3923 73	11.8257 79	11.2994 85	10.8099 78
27	13.2105 34	12.5749 98	11.9867 09	11.4413 81	10.9351 65
28	13.4061 64	12.7464 77	12.1371 11	11.5733 78	11.0510 78
29	13.5907 21	12.9074 90	12.2776 74	11.6961 65	11.1584 06
30	13.7648 31	13.0586 76	12.4090 41	11.8103 86	11.2577 83
31	13.9290 86	13.2006 35	12.5318 14	11.9166 38	11.3497 99
32	14.0840 43	13.3339 29	12.6465 55	12.0154 78	11.4349 99
33	14.2302 30	13.4590 89	12.7537 90	12.1074 21	11.5138 88
34	14.3681 41	13.5766 09	12.8540 09	12.1929 50	11.5869 34
35	14.4982 46	13.6869 57	12.9476 72	12.2725 11	11.6545 68
36	14.6209 87	13.7905 70	13.0352 08	12.3465 22	11.7171 93
37	14.7367 80	13.8878 59	13.1170 17	12.4153 70	11.7751 79
38	14.8460 19	13.9792 10	13.1934 73	12.4794 14	11.8288 69
39	14.9490 75	14.0649 86	13.2649 28	12.5389 89	11.8785 82
40	15.0462 97	14.1455 27	13.3317 09	12.5944 09	11.9246 13
41	15.1380 16	14.2211 52	13.3941 20	12.6459 62	11.9672 35
42	15.2245 43	14.2921 61	13.4524 49	12.6939 18	12.0066 99
43	15.3061 73	13.3588 37	13.5069 62	12.7385 28	12.0432 40
44	15.3831 82	14.4214 43	13.5579 08	12.7800 26	12.0700 74
45	15.4558 32	14.4802 28	13.6055 22	12.8186 29	12.1084 02
46	15.5243 70	14.5354 26	13.6500 20	12.8545 39	12.1374 09
47	15.5890 28	14.5872 54	13.6916 08	12.8879 43	12.1642 67
48	15.6500 27	14.6359 19	13.7304 74	12.9190 17	12.1891 36
49	15.7075 72	14.6816 15	13.7667 98	12.9479 22	12.2121 63
50	15.7618 61	14.7245 21	13.8007 46	12.9748 12	12.2334 85

n(年)	利率 r			
	8.5%	9%	9.5%	10%
1	0.9216 59	0.9174 31	0.9132 42	0.9090 91
2	1.7711 14	1.7591 11	1.7472 53	1.7355 37
3	2.5540 22	2.5312 95	2.5089 07	2.4868 52

（续）

n(年)	利率 r			
	8.5%	9%	9.5%	10%
4	3.2755 97	3.2397 20	3.2044 81	3.1698 65
5	3.9406 42	3.8896 51	3.8397 09	3.7907 87
6	4.5535 87	4.4859 19	4.4198 25	4.3552 61
7	5.1185 14	5.0329 53	4.9496 12	4.8684 19
8	5.6391 82	5.5348 19	5.4334 36	5.3349 26
9	6.1190 63	5.9952 47	5.8752 84	5.7590 24
10	6.5613 48	6.4176 58	6.2787 98	6.1445 67
11	6.9689 84	6.8051 91	6.6473 04	6.4950 61
12	7.3446 86	7.1607 25	6.9838 39	6.8136 92
13	7.6909 55	7.4869 04	7.2911 78	7.1033 56
13	8.0100 97	7.7861 50	7.5718 52	7.3666 87
15	8.3042 37	8.0606 88	7.8281 75	7.6060 80
16	8.5753 33	8.3125 58	8.0622 60	7.8237 09
17	8.8251 92	8.5436 31	8.2760 37	8.0215 53
18	9.0554 76	8.7556 25	8.4712 66	8.2014 12
19	9.2677 20	8.9501 15	8.6495 58	8.3649 20
20	9.4633 37	9.1285 46	8.8123 82	8.5135 64
21	9.6436 28	9.2922 44	8.9610 80	8.6486 94
22	9.8097 96	9.4424 25	9.0968 76	8.7715 40
23	9.9629 45	9.5802 07	9.2208 92	8.8832 18
24	10.1040 97	9.7066 12	9.3341 48	8.9847 44
25	10.2341 91	9.8225 80	9.4375 78	9.0770 40
26	10.3540 93	9.9289 72	9.5320 34	9.1609 45
27	10.4646 02	10.0265 80	9.6182 96	9.2372 23
28	10.5664 53	10.1161 28	9.6970 74	9.3065 67
29	10.6603 26	10.1982 83	9.7690 18	9.3696 06
30	10.7468 44	10.2736 54	9.8347 19	9.4269 14
31	10.8265 84	10.3428 02	9.8947 21	9.4790 13
32	10.9000 78	10.4062 40	9.9495 17	9.5263 76
33	10.9678 13	10.4644 41	9.9995 59	9.5694 32
34	11.0302 43	10.5178 35	10.0452 59	9.6085 75
35	11.0877 91	10.5668 21	10.0869 95	9.6441 59
36	11.1408 12	10.6117 63	10.1251 09	9.6765 08
37	11.1896 89	10.6529 93	10.1599 17	9.7059 17
38	12.2347 36	10.6908 20	10.1917 05	9.7326 51
39	11.2762 55	10.7255 23	10.2207 35	9.7569 56
40	11.3145 20	10.7573 60	10.2472 47	9.7790 51
41	11.3479 88	10.7865 69	10.2714 58	9.7991 37
42	11.3822 93	10.8133 66	10.2935 69	9.8173 97
43	11.4122 52	10.8379 51	10.3137 62	9.8339 97

（续）

n(年)	利率 r			
	8.5%	9%	9.5%	10%
44	11.4398 64	10.8605 05	10.3322 03	9.8490 89
45	11.4653 12	10.8811 97	10.3490 43	9.8628 08
46	11.4887 67	10.9001 81	10.3644 23	9.8752 80
47	11.5103 84	10.9175 97	10.3784 69	9.8866 18
48	11.5303 08	10.9335 75	10.3912 96	9.8969 25
49	11.5486 71	10.9482 34	10.4030 10	9.9062 96
50	11.5655 95	10.9616 82	10.4137 07	9.9148 14

表 9　看涨期权价值和股票价格百分比

$\sigma\sqrt{T}$	MP/CV(SP)								
	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80
0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.15	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.2	0.5
0.20	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.4	0.8	1.5
0.25	0.0	0.0	0.0	0.1	0.2	0.5	1.0	1.8	2.8
0.30	0.0	0.1	0.1	0.3	0.7	1.2	2.0	3.1	4.4
0.35	0.1	0.2	0.4	0.8	1.4	2.3	3.3	4.6	6.2
0.40	0.2	0.5	0.9	1.6	2.4	3.5	4.8	6.3	8.0
0.45	0.5	1.0	1.7	2.6	3.7	5.0	6.5	8.1	9.9
0.50	1.0	1.7	2.6	3.7	5.1	6.6	8.2	10.0	11.8
0.55	1.7	2.6	3.8	5.1	6.6	8.3	10.0	11.9	13.8
0.60	2.5	3.7	5.1	6.6	8.3	10.1	11.9	13.8	15.8
0.65	3.6	4.9	6.5	8.2	10.0	11.9	13.8	15.8	17.8
0.70	4.7	6.3	8.1	9.9	11.9	13.8	15.8	17.8	19.8
0.75	6.1	7.9	9.8	11.7	13.7	15.8	17.8	19.8	21.8
0.80	7.5	9.5	11.5	13.6	15.7	17.7	19.8	21.8	23.7
0.85	9.1	11.2	13.3	15.5	17.6	19.7	21.8	23.8	25.7
0.90	10.7	13.0	15.2	17.4	19.6	21.7	23.8	25.8	27.7
0.95	12.5	14.8	17.1	19.4	21.6	23.7	25.7	27.7	29.6
1.00	14.3	16.7	19.1	21.4	23.6	25.7	27.7	29.7	31.6
1.05	16.1	18.6	21.0	23.3	25.6	27.7	29.7	31.6	33.5
1.10	18.0	20.6	23.0	25.3	27.5	29.6	31.6	33.5	35.4
1.15	20.0	22.5	25.0	27.3	29.5	31.6	33.6	35.4	37.2
1.20	21.9	24.5	27.0	29.3	31.5	33.6	35.5	37.3	39.1
1.25	23.9	26.5	29.0	31.3	33.5	35.5	37.4	39.2	40.9
1.30	25.9	28.5	31.0	33.3	35.4	37.4	39.3	41.0	42.7
1.35	27.9	30.5	33.0	35.2	37.3	39.3	41.1	42.8	44.4
1.40	29.9	32.5	34.9	37.1	39.2	41.1	42.9	44.6	46.2

（续）

σ√T	MP/CV(SP)								
	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80
1.45	31.9	34.5	36.9	39.1	41.1	43.0	44.7	46.4	47.9
1.50	33.8	36.4	38.8	40.9	42.9	44.8	46.5	48.1	49.6
1.55	35.8	38.4	40.7	42.8	44.8	46.6	48.2	49.8	51.2
1.60	37.8	40.3	42.6	44.6	46.5	48.3	49.9	51.4	52.8
1.65	39.7	42.2	44.4	46.4	48.3	50.0	51.6	53.1	54.4
1.70	41.6	44.0	46.2	48.2	50.0	51.7	53.2	54.7	56.0
1.75	43.5	45.9	48.0	50.0	51.7	53.4	54.8	56.2	57.5
2.00	52.5	54.6	56.5	58.2	59.7	61.1	62.4	63.6	64.6
2.25	60.7	62.5	64.1	65.6	66.8	68.0	69.1	70.0	70.9
2.50	67.9	69.4	70.8	72.0	73.1	74.0	74.9	75.7	76.4
2.75	74.2	75.4	76.6	77.5	78.4	79.2	79.9	80.5	81.1
3.00	79.5	80.5	81.4	82.2	82.9	83.5	84.1	84.6	85.1
3.50	87.6	88.3	88.8	89.3	89.7	90.1	90.5	90.8	91.1
4.00	92.9	93.3	93.6	93.9	94.2	94.4	94.6	94.8	94.9
4.50	96.2	96.4	96.6	96.7	96.9	97.0	97.1	97.2	97.3
5.00	98.1	98.2	98.3	98.3	98.4	98.5	98.5	98.6	98.6

σ√T	MP/CV(SP)									
	0.82	0.84	0.86	0.88	0.90	0.92	0.94	0.96	0.98	1.00
0.05	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.3	0.6	1.2	2.0
0.10	0.1	0.2	0.3	0.5	0.8	1.2	1.7	2.3	3.1	4.0
0.15	0.7	1.0	1.3	1.7	2.2	2.8	3.5	4.2	5.1	6.0
0.20	1.9	2.3	2.8	3.4	4.0	4.7	5.4	6.2	7.1	8.0
0.25	3.3	3.9	4.5	5.2	5.9	6.6	7.4	8.2	9.1	9.9
0.30	5.0	5.7	6.3	7.0	7.8	8.6	9.4	10.2	11.1	11.9
0.35	6.8	7.5	8.2	9.0	9.8	10.6	11.4	12.2	13.0	13.9
0.40	8.7	9.4	10.2	11.0	11.7	12.5	13.4	14.2	15.0	15.9
0.45	10.6	11.4	12.2	12.9	13.7	14.5	15.3	16.2	17.0	17.8
0.50	12.6	13.4	14.2	14.9	15.7	16.5	17.3	18.1	18.9	19.7
0.55	14.6	15.4	16.1	16.9	17.7	18.5	19.3	20.1	20.9	21.7
0.60	16.6	17.4	18.1	18.9	19.7	20.5	21.3	22.0	22.8	23.6
0.65	18.6	19.3	20.1	20.9	21.7	22.5	23.2	24.0	24.7	25.5
0.70	20.6	21.3	22.1	22.9	23.6	24.4	25.2	25.9	26.6	27.4
0.75	22.5	23.3	24.1	24.8	25.6	26.3	27.1	27.8	28.5	29.2
0.80	24.5	25.3	26.0	26.8	27.5	28.3	29.0	29.7	30.4	31.1
0.85	26.5	27.2	28.0	28.7	29.4	30.2	30.9	31.6	32.2	32.9
0.90	28.4	29.2	29.9	30.6	31.3	32.0	32.7	33.4	34.1	34.7
0.95	30.4	31.1	31.8	32.5	33.2	33.9	34.6	35.2	35.9	36.5
1.00	32.3	33.0	33.7	34.4	35.1	35.7	36.4	37.0	37.7	38.3
1.05	34.2	34.9	35.6	36.2	36.9	37.6	38.2	38.8	39.4	40.0
1.10	36.1	36.7	37.4	38.1	38.7	39.3	40.0	40.6	41.2	41.8

（续）

$\sigma\sqrt{T}$	MP/CV(SP)									
	0.82	0.84	0.86	0.88	0.90	0.92	0.94	0.96	0.98	1.00
1.15	37.9	38.6	39.2	39.9	40.5	41.1	41.7	42.3	42.9	43.5
1.20	39.7	40.4	41.0	41.7	42.3	42.9	43.5	44.0	44.6	45.1
1.25	41.5	42.2	42.8	43.4	44.0	44.6	45.2	45.7	46.3	46.8
1.30	43.3	43.9	44.5	45.1	45.7	46.3	46.8	47.4	47.9	48.4
1.35	45.1	45.7	46.3	46.8	47.4	47.9	48.5	49.0	49.5	50.0
1.40	46.8	47.4	47.9	48.5	49.0	49.6	50.1	50.6	51.1	51.6
1.45	48.5	49.0	49.6	50.1	50.7	51.2	51.7	52.2	52.7	53.2
1.50	50.1	50.7	51.2	51.8	52.3	52.8	53.3	53.7	54.2	54.7
1.55	51.8	52.3	52.8	53.3	53.8	54.3	54.8	55.3	55.7	56.2
1.60	53.4	53.9	54.4	54.9	55.4	55.9	56.3	56.8	57.2	57.6
1.65	54.9	55.4	55.9	56.4	56.9	57.3	57.8	58.2	58.6	59.1
1.70	56.5	57.0	57.5	57.9	58.4	58.8	59.2	59.7	60.1	60.5
1.75	58.0	58.5	58.9	59.4	59.8	60.2	60.7	61.1	61.5	61.8
2.00	65.0	65.4	65.8	66.2	66.6	66.9	67.3	67.6	67.9	68.3
2.25	71.3	71.6	71.9	72.2	72.5	72.8	73.1	73.4	73.7	73.9
2.50	76.7	77.0	77.2	77.5	77.7	78.0	78.2	78.4	78.7	78.9
2.75	81.4	81.6	81.8	82.0	82.2	82.4	82.6	82.7	82.9	83.1
3.00	85.3	85.4	85.6	85.8	85.9	86.1	86.2	86.4	86.5	86.6
3.50	91.2	91.3	91.4	91.5	91.6	91.6	91.7	91.8	91.9	92.0
4.00	95.0	95.0	95.1	95.2	95.2	95.3	95.3	95.4	95.4	95.4
4.50	97.3	97.3	97.4	97.4	97.4	97.5	97.5	97.5	97.5	97.6
5.00	98.6	98.6	98.7	98.7	98.7	98.7	98.7	98.7	98.7	98.8

$\sigma\sqrt{T}$	MP/CV(SP)								
	1.02	1.04	1.06	1.08	1.10	1.12	1.14	1.16	1.18
0.05	3.1	4.5	6.0	7.5	9.1	10.7	12.3	13.8	15.3
0.10	5.0	6.1	7.3	8.6	10.0	11.3	12.7	14.1	15.4
0.15	7.0	8.0	9.1	10.2	11.4	12.6	13.8	15.0	16.2
0.20	8.9	9.9	10.9	11.9	13.0	14.1	15.2	16.3	17.4
0.25	10.9	11.8	12.8	13.7	14.7	15.7	16.7	17.7	18.7
0.30	12.8	13.7	14.6	15.6	16.5	17.4	18.4	19.3	20.3
0.35	14.8	15.6	16.5	17.4	18.3	19.2	20.1	21.0	21.9
0.40	16.7	17.5	18.4	19.2	20.1	20.9	21.8	22.6	23.5
0.45	18.6	19.4	20.3	21.1	21.9	22.7	23.5	24.3	25.1
0.50	20.5	21.3	22.1	22.9	23.7	24.5	25.3	26.1	26.8
0.55	22.4	23.2	24.0	24.8	25.5	26.3	27.0	27.8	28.5
0.60	24.3	25.1	25.8	26.6	27.3	28.1	28.8	29.5	30.2
0.65	26.2	27.0	27.7	28.4	29.1	29.8	30.5	31.2	31.9
0.70	28.1	28.8	29.5	30.2	30.9	31.6	32.3	32.9	33.6
0.75	29.9	30.6	31.3	32.0	32.7	33.3	34.0	34.6	35.3
0.80	31.8	32.4	33.1	33.8	34.4	35.1	35.7	36.3	36.9

（续）

$\sigma\sqrt{T}$	MP/CV(SP)								
	1.02	1.04	1.06	1.08	1.10	1.12	1.14	1.16	1.18
0.85	33.6	34.2	34.9	35.5	36.2	36.8	37.4	38.0	38.6
0.90	35.4	36.0	36.6	37.3	37.9	38.5	39.1	39.6	40.2
0.95	37.2	37.8	38.4	39.0	39.6	40.1	40.7	41.3	41.8
1.00	38.9	39.5	40.1	40.7	41.2	41.8	42.4	42.9	43.4
1.05	40.6	41.2	41.8	42.4	42.9	43.5	44.0	44.5	45.0
1.10	42.3	42.9	43.5	44.0	44.5	45.1	45.6	46.1	46.6
1.15	44.0	44.6	45.1	45.6	46.2	46.7	47.2	47.7	48.2
1.20	45.7	46.2	46.7	47.3	47.8	48.3	48.7	49.2	49.7
1.25	47.3	47.8	48.4	48.8	49.3	49.8	50.3	50.7	51.2
1.30	48.9	49.4	49.9	50.4	50.9	51.3	51.8	52.2	52.7
1.35	50.5	51.0	51.5	52.0	52.4	52.9	53.3	53.7	54.1
1.40	52.1	52.6	53.0	53.5	53.9	54.3	54.8	55.2	55.6
1.45	53.6	54.1	54.5	55.0	55.4	55.8	56.2	56.6	57.0
1.50	55.1	55.6	56.0	56.4	56.8	57.2	57.6	58.0	58.4
1.55	56.6	57.0	57.4	57.8	58.2	58.6	59.0	59.4	59.7
1.60	58.0	58.5	58.9	59.2	59.6	60.0	60.4	60.7	61.1
1.65	59.5	59.9	60.2	60.6	61.0	61.4	61.7	62.1	62.4
1.70	60.9	61.2	61.6	62.0	62.3	62.7	63.0	63.4	63.7
1.75	62.2	62.6	62.9	63.3	63.6	64.0	64.3	64.6	64.9
2.00	68.6	68.9	69.2	69.5	69.8	70.0	70.3	70.6	70.8
2.25	74.2	74.4	74.7	74.9	75.2	75.4	75.6	75.8	76.0
2.50	79.1	79.3	79.5	79.7	79.9	80.0	80.2	80.4	80.6
2.75	83.3	83.4	83.6	83.7	83.9	84.0	84.2	84.3	84.4
3.00	86.8	86.9	87.0	87.1	87.3	87.4	87.5	87.6	97.7
3.50	92.1	92.1	92.2	92.3	92.4	92.4	92.5	92.6	92.6
4.00	95.5	95.5	95.6	95.6	95.7	95.7	95.7	95.8	95.8
4.50	97.6	97.6	97.6	97.6	97.7	97.7	97.7	97.7	97.8
5.00	98.8	98.8	98.8	98.8	98.8	98.8	98.8	98.8	98.9

$\sigma\sqrt{T}$	MP/CV(SP)									
	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45	1.50	1.75	2.00	2.50
0.05	16.7	20.0	23.1	25.9	28.6	31.0	33.3	42.9	50.0	60.0
0.10	16.8	20.0	23.1	25.9	28.6	31.0	33.3	42.9	50.0	60.0
0.15	17.4	20.4	23.3	26.0	28.6	31.1	33.3	42.9	50.0	60.0
0.20	18.5	21.2	23.9	26.4	28.9	31.2	33.5	42.9	50.0	60.0
0.25	19.8	22.3	24.7	27.1	29.4	31.7	33.8	42.9	50.0	60.0
0.30	21.2	23.5	25.8	28.1	30.2	32.3	34.3	43.1	50.1	60.0
0.35	22.7	24.9	27.1	29.2	31.2	33.2	35.1	43.5	50.2	60.0
0.40	24.3	26.4	28.4	30.4	32.3	34.2	36.0	44.0	50.5	60.1

（续）

$\sigma\sqrt{T}$	MP/CV(SP)									
	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45	1.50	1.75	2.00	2.50
0.45	25.9	27.9	29.8	31.7	33.5	35.3	37.0	44.6	50.8	60.2
0.50	27.6	29.5	31.3	33.1	34.8	36.4	38.1	45.3	51.3	60.4
0.55	29.2	31.0	32.8	34.5	36.1	37.7	39.2	46.1	51.9	60.7
0.60	30.9	32.6	34.3	35.9	37.5	39.0	40.4	47.0	52.5	61.0
0.65	32.6	34.2	35.8	37.4	38.9	40.3	41.7	48.0	53.3	61.4
0.70	34.2	35.8	37.3	38.8	40.3	41.6	43.0	49.0	54.0	61.9
0.75	35.9	37.4	38.9	40.3	41.7	43.0	44.3	50.0	54.9	62.4
0.80	37.5	39.0	40.4	41.8	43.1	44.4	45.6	51.1	55.8	63.0
0.85	39.2	40.6	41.9	43.3	44.5	45.8	46.9	52.2	56.7	63.6
0.90	40.8	42.1	43.5	44.7	46.0	47.1	48.3	53.3	57.6	64.3
0.95	42.4	43.7	45.0	46.2	47.4	48.5	49.6	54.5	58.6	65.0
1.00	44.0	45.2	46.5	47.6	48.8	49.9	50.9	55.6	59.5	65.7
1.05	45.5	46.8	48.0	49.1	50.2	51.2	52.2	56.7	60.5	66.5
1.10	47.1	48.3	49.4	50.5	51.6	52.6	53.5	57.9	61.5	67.2
1.15	48.6	49.8	50.9	51.9	52.9	53.9	54.9	59.0	62.5	68.0
1.20	50.1	51.3	52.3	53.3	54.3	55.2	56.1	60.2	63.5	68.8
1.25	51.6	52.7	53.7	54.7	55.7	56.6	57.4	61.3	64.5	69.6
1.30	53.1	54.1	55.1	56.1	57.0	57.9	58.7	62.4	65.5	70.4
1.35	54.6	55.6	56.5	57.4	58.3	59.1	59.9	63.5	66.5	71.1
1.40	56.0	56.9	57.9	58.7	59.6	60.4	61.2	64.8	67.5	71.9
1.45	57.4	58.3	59.2	60.0	60.9	61.6	62.4	65.7	68.4	72.7
1.50	58.8	59.7	60.5	61.3	62.1	62.9	63.6	66.8	69.4	73.5
1.55	60.1	61.0	61.8	62.6	63.3	64.1	64.7	67.8	70.3	74.3
1.60	61.4	62.3	63.1	63.8	64.5	65.2	65.9	68.8	71.3	75.1
1.65	62.7	63.5	64.3	65.0	65.7	66.4	67.0	69.9	72.2	75.9
1.70	64.0	64.8	65.5	66.2	66.9	67.5	68.2	70.9	73.1	76.6
1.75	65.3	66.0	66.7	67.4	68.0	68.7	69.2	71.9	74.0	77.4
2.00	71.1	71.7	72.3	72.9	73.4	73.9	74.4	76.5	78.3	81.0
2.25	76.3	76.8	77.2	77.7	78.1	78.5	78.9	80.6	82.1	84.3
2.50	80.7	81.1	81.5	81.9	82.2	82.6	82.9	84.3	85.4	87.2
2.75	84.6	84.9	85.2	85.5	85.8	86.0	86.3	87.4	88.3	89.7
3.00	87.8	88.1	88.3	88.5	88.8	89.0	89.2	90.0	90.7	91.8
3.50	92.7	92.8	93.0	93.1	93.3	93.4	93.5	94.0	94.4	95.1
4.00	95.8	95.9	96.0	96.1	96.2	96.2	96.3	96.6	96.8	97.2
4.50	97.8	97.8	97.9	97.9	97.9	98.0	98.0	98.2	98.3	98.5
5.00	98.9	98.9	98.9	98.9	99.0	99.0	99.0	99.1	99.1	99.2

资料来源：R. A. Brealey and C. M. Stewart (1991). *Principles of Corporate Finance*. McGraw-Hill, New York.

表 10　换算表(5% 利息)

x	l_x	d_x	q_x	D_x	N_x	C_x	M_x	L. E.
0	100 000	1 260	0.012 600	100 000 000	1 992 208.86	1 200.00	5 132.91	74.4
1	98 740	90	0.000 932	94 038.10	1 892 208.86	83.45	3 932.91	74.3
2	98 648	64	0.000 649	89 476.64	1 798 170.76	55.29	3 849.46	73.4
3	98 584	49	0.000 497	85 160.57	1 708 694.12	40.31	3 794.18	72.4
4	98 535	40	0.000 406	81 064.99	1 623 533.55	31.34	3 753.87	71.5
5	98 495	36	0.000 366	77 173.41	1 542 468.56	26.86	3 722.53	70.5
6	98 459	33	0.000 335	73 471.62	1 465 295.15	23.45	3 695.66	69.5
7	98 426	30	0.000 305	69 949.52	1 391 823.53	20.31	3 672.21	68.5
8	98 396	26	0.000 264	66 598.29	1 321 874.01	16.76	3 652.90	67.6
9	98 370	23	0.000 234	63 410.18	1 255 275.73	14.12	3 635.14	66.6
10	98 347	19	0.000 193	60 376.53	1 191 865.55	11.11	3 621.02	65.6
11	98 328	19	0.000 193	57 490.35	1 131 489.02	10.58	3 609.92	64.6
12	98 309	24	0.000 244	54 742.13	1 073 998.67	12.73	3 599.34	63.6
13	98 285	37	0.000 376	52 122.63	1 019 256.54	18.69	3 586.61	62.6
14	98 248	52	0.000 529	49 621.92	967 133.91	25.01	3 567.92	61.7
15	98 196	67	0.000 682	47 233.95	917 511.99	30.69	3 542.91	60.7
16	98 129	82	0.000 836	44 954.03	870 278.04	35.78	3 512.21	59.7
17	98 047	94	0.000 959	42 777.58	825 324.01	39.06	3 476.44	58.8
18	97 953	102	0.001 041	40 701.49	782 546.43	40.36	3 437.38	57.8
19	97 851	110	0.001 124	38 722.96	741 844.94	41.46	3 397.01	56.9
20	97 741	118	0.001 207	36 837.55	703 121.97	42.36	3 355.56	56.0
21	97 623	124	0.001 270	35 041.03	666 284.42	42.39	3 313.20	55.0
22	97 499	129	0.001 323	33 330.02	631 243.39	42.00	3 270.81	54.1
23	97 370	130	0.001 335	31 700.88	597 913.37	40.31	3 228.81	53.2
24	97 240	130	0.001 337	30 151.00	566 212.49	38.39	3 188.50	52.2
25	97 110	128	0.001 318	28 676.85	536 061.49	36.00	3 150.11	51.3
26	96 982	126	0.001 299	27 275.29	507 384.63	33.75	3 114.12	50.4
27	96 856	126	0.001 301	25 942.72	480 109.35	32.14	3 080.37	49.4
28	96 730	126	0.001 303	24 675.21	454 166.63	30.61	3 048.23	48.5
29	96 604	127	0.001 315	23 469.59	429 491.42	29.38	3 017.61	47.6
30	96 477	127	0.001 316	22 322.60	406 021.84	27.99	2 988.23	46.6
31	96 350	130	0.001 349	21 231.64	383 699.23	27.28	2 960.24	45.7
32	96 220	132	0.001 372	20 193.32	362 467.60	26.38	2 932.96	44.7
33	96 088	137	0.001 326	19 205.35	342 274.28	26.08	2 906.58	43.8
34	95 951	143	0.001 490	18 264.73	323 068.92	25.92	2 880.50	42.9
35	95 808	153	0.001 597	17 369.06	304 804.19	26.42	2 854.57	41.9
36	95 655	163	0.001 704	16 515.54	287 435.13	26.80	2 828.16	41.0

（续）

x	I_x	d_x	q_x	D_x	N_x	C_x	M_x	L. E.
37	95 492	175	0.001 833	15 702.29	270 919.58	27.41	2 801.35	40.1
38	95 317	188	0.001 972	14 927.15	255 217.30	28.04	2 773.95	39.1
39	95 129	203	0.002 134	14 188.30	240 290.14	28.84	2 745.91	38.2
40	94 926	220	0.002 318	13 483.83	226 101.85	29.76	2 717.07	37.3
41	94 706	241	0.002 545	12 811.98	212 618.02	31.05	2 687.31	36.4
42	94 465	264	0.002 795	12 170.83	199 806.04	32.39	2 656.26	35.5
43	94 201	288	0.003 057	11 558.88	187 635.20	33.66	2 623.87	34.6
44	93 913	314	0.003 344	10 974.80	176 076.33	34.95	2 590.21	33.7
45	93 599	343	0.003 665	10 417.24	165 101.53	36.36	2 555.26	32.8
46	93 256	374	0.004 010	9 884.83	154 684.29	37.76	2 518.91	31.9
47	92 882	410	0.004 414	9 376.36	144 799.46	39.42	2 481.15	31.0
48	92 472	451	0.004 877	8 890.45	135 423.10	41.30	2 441.73	30.1
49	92 021	495	0.005 379	8 425.80	126 532.64	43.17	2 400.44	29.3
50	91 526	540	0.005 900	7 981.41	118 106.84	44.85	2 357.27	28.4
51	90 986	584	0.006 419	7 556.49	110 125.43	46.19	2 312.43	27.6
52	90 402	631	0.006 980	7 150.47	102 568.94	47.53	2 266.23	26.8
53	89 771	684	0.007 619	6 762.44	95 418.47	49.07	2 218.70	26.0
54	89 087	739	0.008 295	6 391.34	88 656.03	50.49	2 169.63	24.1
55	88 348	797	0.009 021	6 036.50	82 264.69	51.86	2 119.13	24.4
56	87 551	856	0.009 777	5 697.19	76 228.19	53.05	2 067.27	23.6
57	86 695	919	0.010 600	5 372.84	70 531.00	54.24	2 014.22	22.8
58	85 776	987	0.011 507	5 062.75	65 158.16	55.48	1 959.98	22.0
59	84 789	1 063	0.012 537	4 766.18	60 095.41	56.91	1 904.50	21.3
60	83 726	1 143	0.013 676	4 482.32	55 329.23	58.38	1 847.58	20.5
61	82 581	1 233	0.014 931	4 210.49	50 846.91	59.87	1 789.21	19.8
62	81 348	1 324	0.016 276	3 950.12	46 636.42	61.23	1 729.34	19.1
63	80 024	1 415	0.017 682	3 700.79	42 686.30	62.32	1 668.11	18.4
64	78 609	1 502	0.019 107	3 462.24	38 985.51	63.00	1 605.79	17.7
65	77 107	1 587	0.020 582	3 234.37	35 523.27	63.40	1 542.78	17.0
66	75 520	1 674	0.022 166	3 016.95	32 288.90	63.69	1 479.38	16.3
67	73 846	1 764	0.023 888	2 809.60	29 271.95	63.92	1 415.69	15.7
68	72 082	1 864	0.025 859	2 611.89	26 462.35	64.33	1 351.78	15.1
69	70 218	1 970	0.028 055	2 423.19	23 850.47	64.75	1 287.45	14.4
70	68 248	2 083	0.030 521	2 243.05	21 427.28	65.20	1 222.70	13.8
71	66 165	2 193	0.033 144	2 071.04	19 184.23	65.37	1 157.50	13.2
72	63 972	2 299	0.035 938	1 907.04	17 113.19	65.27	1 092.13	12.6
73	61 673	2 394	0.038 818	1 750.96	15 206.15	64.73	1 026.86	12.1

（续）

x	l_x	d_x	q_x	D_x	N_x	C_x	M_x	L. E.
74	59 279	2 480	0.041 836	1 602.85	13 455.19	63.86	962.13	11.5
75	56 799	2 560	0.045 071	1 462.66	11 852.34	62.78	898.26	11.0
76	54 239	2 640	0.048 673	1 330.22	10 389.68	61.66	835.48	10.5
77	51 599	2 721	0.052 734	1 205.22	9 059.46	60.53	773.81	9.9
78	48 878	2 807	0.057 429	1 087.30	7 854.24	59.47	713.29	9.4
79	46 071	2 891	0.062 751	976.05	6 766.94	58.33	653.82	8.9
80	43 180	2 972	0.068 828	871.24	5 790.89	57.11	595.49	8.5
81	40 208	3 036	0.075 507	772.64	4 919.65	55.56	538.37	8.0
82	37 172	3 077	0.082 777	680.29	4 147.00	53.63	482.81	7.6
83	34 095	3 083	0.090 424	594.26	3 466.72	51.18	429.18	7.2
84	31 012	3 052	0.098 414	514.79	2 872.45	48.25	378.00	6.8
85	27 960	2 999	0.107 260	442.02	2 357.66	45.15	329.76	6.5
86	24 961	2 923	0.117 103	375.82	1 915.64	41.91	284.60	6.1
87	22 038	2 803	0.127 189	316.01	1 539.82	38.28	242.69	5.8
88	19 235	2 637	0.137 094	262.68	1 223.81	34.30	204.41	5.5
89	16 598	2 444	0.147 247	215.88	961.12	30.27	170.11	5.2
90	14 154	2 246	0.158 683	175.32	745.24	26.50	139.84	4.9
91	11 908	2 045	0.171 733	140.48	569.92	22.98	113.34	4.7
92	9 863	1 831	0.185 643	110.81	429.44	19.59	90.36	4.4
93	8 032	1 608	0.200 199	85.94	318.63	16.39	70.77	4.2
94	6 424	1 381	0.214 975	65.47	232.68	13.40	54.39	4.0
95	5 043	1 159	0.229 824	48.94	167.22	10.71	40.98	3.8
96	3 884	945	0.243 306	35.90	118.27	8.32	30.27	3.7
97	2 939	754	0.256 550	25.87	82.37	6.32	21.95	3.5
98	2 185	587	0.268 650	18.32	56.60	4.69	15.63	3.4
99	1 598	448	0.280 350	12.76	38.18	3.41	10.94	3.3
100	1 150	335	0.291 304	8.75	25.42	2.43	7.53	3.2

资料来源：Based on R. Muksian (2003). *Mathematics of Interest Rates, Insurance, Social Security and Pensions*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

参考文献

Aczel, A. (1989). *Complete Business Statistics*. Richard D. Irwin, Homewood, IL.

Bell, C., and L. Adams (1949). *Mathematics of Finance*. Henry Holt, New York.

Bliss, E. (1989). *College Mathematics for Business*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Brealey, R., and S. Myers (2003). *Principles of Corporate Finance*. McGraw-Hill, New York.

Brigham, E., and J. Houston (2003). *Fundamentals of Financial Management*. South-Western, Cincinnati, OH.

Cissell, R., H. Cissel, and D. Flaspohler (1990). *Mathematics of Finance*, 8th ed. Houghton Mifflin, Boston.

Copeland, T., and J. Weston (2004). *Financial Theory and Corporate Policy*, 4th ed. Addison-Wesley, Reading, MA.

Cox, D., and M. Cox (2006). *The Mathematics of Banking and Finance*. Wiley, Hoboken, NJ.

Dean, B., M. Sasieni, and S. Gupta (1978). *Mathematics for Modern Management*. R. E. Krieger, Melbourne, FL.

Dowling, E. (1980). *Mathematics for Economists*. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill, New York.

Federer Vaaler, L., and J. Daniel (2007). *Mathematical Interest Theory*, 2nd ed. American Mathematical Society, Providence, RI.

Garman, E. T., J. J. Xiao, and B. Branson (2000). *The Mathematics of Personal Financial Planning*. Dame Publications, Cincinnati, OH.

Gitman, L. (2007). *Principles of Managerial Finance*. Addison-Wesley, Reading, MA.

Goodman, V. (2009). *The Mathematics of Finance*. American Mathematical Society, Providence, RI.

Guthrie, G. L., and L. Lemon (2004). *Mathematics of Interest Rates and Finance*. Pearson, Upper Saddle River, NJ.

Hanke, J., and A. Reitsch (1994). *Understanding Business Statistics*. Richard D. Irwin, Homewood, IL.

Johnson, R. (1986). *The Mathematics of Finance: Applied Present Value Concepts*, 2nd ed. Kendall/Hunt, Dubugue, IA.

Joshi, M. (2008). *The Concepts and Practice of Mathematical Finance*. Cambridge University Press, New York.

Kellison, S. (1991). *Theory of Interest*. Richard D. Irwin, Homewood, IL.

Kornegay, C. (1999). *Mathematical Dictionary*. Sage Publications, Thousand Oaks, CA.

Mavron, V., and T. Phillips (2000). *Elements of Mathematics for Economics and Finance*. Springer-Verlag, New York.

Mendenhall, W., J. Reinmath, R. Beaver, and D. Duham (1982). *Statistics for Management and Economics*. Duxbury Press, Belmont, CA.

Muksian, R. (2003). *Mathematics of Interest Rates, Insurance, Social Security, and Pensions*. Prentice Hall, Saddle River, NJ.

Parmenter, M. (1999). *Theory of Interest and Life Contingencies*. ACTEX Publications, Winsted, CT.

Reilly, F. K. (1989). *Investment Analysis and Portfolio Management*, 3rd ed. Dryden Press, Hinsdale, IL.

Roman, S. (2004). *Introduction to the Mathematics of Finance*. Springer-Verlag, New York.

Scalzo, F. (1979). *Mathematics for Business and Economics*. Petrocelli Books, New York.

Shao, S., and L. Shao (1998). *Mathematics for Management and Finance*. South-Western, Cincinnati, OH.

Thomself, M. (1989). *The Mathematics of Investing*. Wiley, New York.

Van Matre, J., and G. Gilbreath (1980). *Statistics for Business and Economics*. Richard D. Irwin, Homewood, IL.

Vogt, W. (1999). *Dictionary of Statistics and Methodology*. Sage Publications, Thousand Oaks, CA.

Williams, R. (2006). *Introduction to the Mathematics of Finance*. American Mathematical Society, Providence, RI.

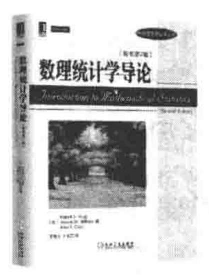
Zima, P., and R. Brown (2001). *Mathematics of Finance*. McGraw-Hill, New York.

推荐阅读



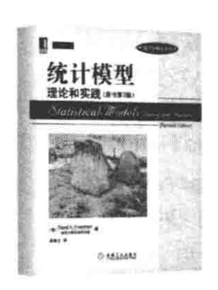
数理统计与数据分析（原书第3版）

作者：John A. Rice ISBN：978-7-111-33646-4 定价：85.00元



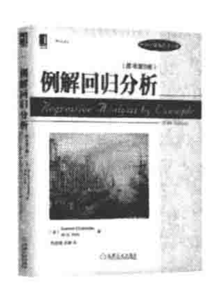
数理统计学导论（原书第7版）

作者：Robert V. Hogg，Joseph W. McKean，Allen Craig
ISBN：978-7-111-47951-2 定价：99.00元



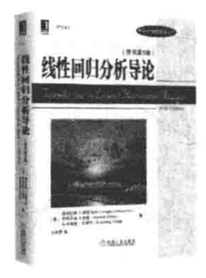
统计模型：理论和实践（原书第2版）

作者： David A. Freedman ISBN：978-7-111-30989-5 定价：45.00元



例解回归分析（原书第5版）

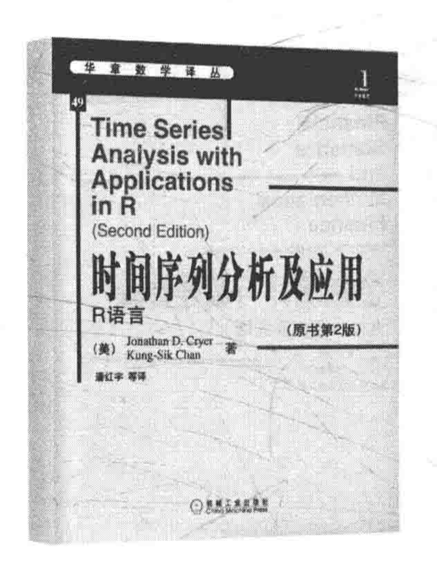
作者：Samprit Chatterjee；Ali S.Hadi ISBN：978-7-111-43156-5 定价：69.00元

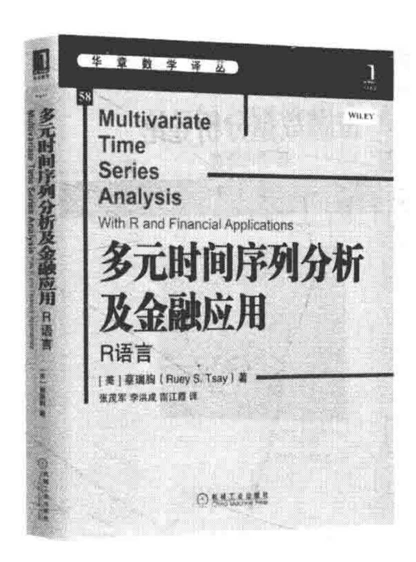


线性回归分析导论（原书第5版）

作者：Douglas C.Montgomery ISBN：978-7-111-53282-8 定价：99.00元

推荐阅读



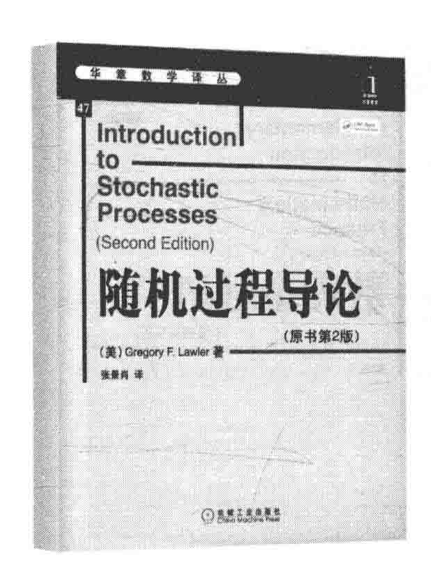


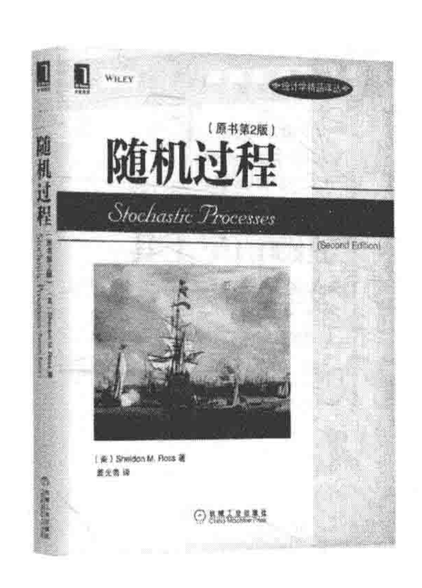
时间序列分析及应用：R语言（原书第2版）

作者：Jonathan D. Cryer,Kung-Sik Chan ISBN：978-7-111-32572-7 定价：48.00元

多元时间序列分析及金融应用：R语言

作者：Ruey S.Tsay ISBN：978-7-111-54260-5 定价：79.00元





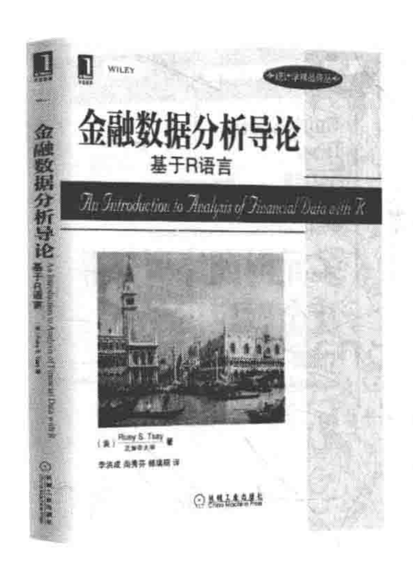
随机过程导论（原书第2版）

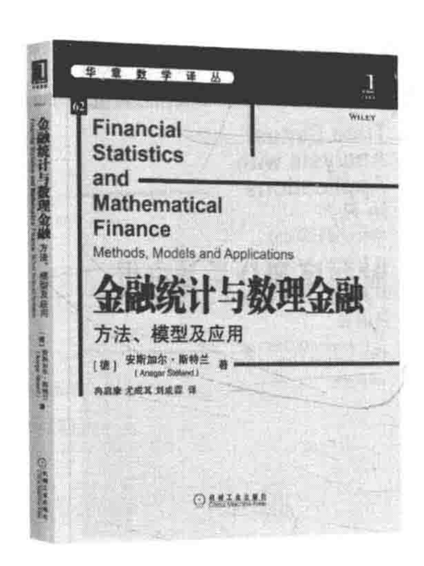
作者：Gregory F. Lawler ISBN：978-7-111-31544-5 定价：36.00元

随机过程（原书第2版）

作者：Sheldon M. Ross ISBN：978-7-111-43029-2 定价：79.00元

推荐阅读



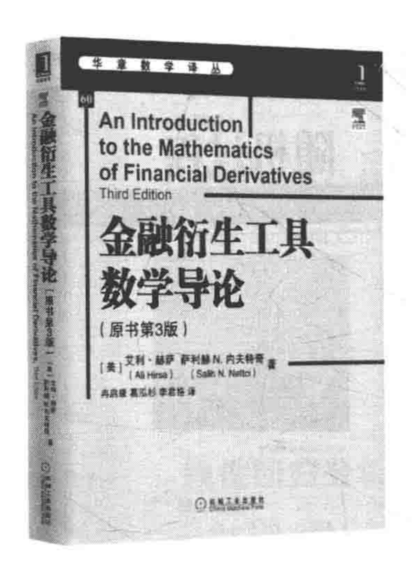


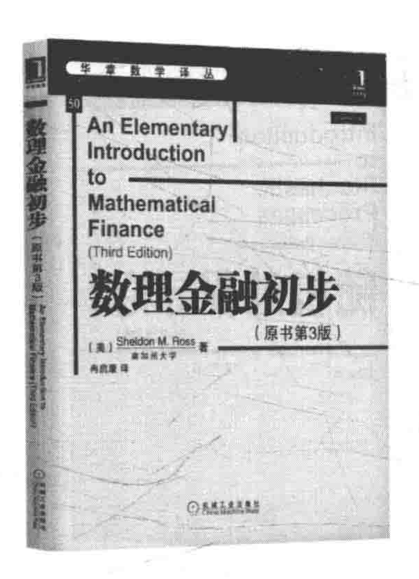
金融数据分析导论：基于R语言

作者：Ruey S.Tsay ISBN：978-7-111-43506-8 定价：69.00元

金融统计与数理金融：方法、模型及应用

作者：Ansgar Steland ISBN：978-7-111-57301-2 定价：85.00元





金融衍生工具数学导论（原书第3版）

作者：Salih Neftci ISBN：978-7-111-54460-9 定价：99.00元

数理金融初步（原书第3版）

作者：Sheldon M. Ross ISBN：978-7-111-41109-3 定价：39.00元

数理金融

本书有助于你提升必要的数理技能，更准确地理解商务活动中产生的大量金融问题，更有效率地解决无论是小企业运营还是大公司管理都会遇到的金融问题。这种数理技能还能帮助每个人更好地做出个人财务决策。尽管实施金融计算已有自动化的工具，但是掌握基本的数理公式和表格，对真正理解金融是至关重要的。

本书从最基础的数学概念开始介绍，包括数、指数、对数、数列和统计方法。接下来，通过对简单利率、银行贴现、复合利率以及企业年金的讨论，从数理逻辑上探索货币的时间价值。随后的章节进一步从数学的角度探讨有关的金融问题，包括：

- 抵押债务、租赁和信用贷款
- 资本预算、折旧和损耗
- 盈亏平衡分析和杠杆
- 用股票、债券、共同基金、期权、资本成本和比率分析进行组合投资
- 收益与风险，以及资本资产定价模型(CAPM)
- 生存年金以及人寿、财产和意外伤害保险

本书还提供了大量的例子和练习，可以帮助你应用所学数学技巧去解决金融领域的实际问题。作者并没有刻意推广使用金融计算器或者计算机，而是在较少强调公式的推导和证明的情况下引导你使用公式和表来解决问题。

作者简介

M. J. 阿尔哈比（M. J. Alhabeeb）于1991年在伊利诺伊大学香槟分校获得博士学位，现为美国马萨诸塞大学阿姆赫斯特分校经济金融教授。因富有创新和创造性的教学而获得2004年国家级杰出教学奖，还曾获得国家级杰出研究奖和卓越论文奖等多种奖项。他是美国经济学会、家庭和消费者科学协会等多种学会的会士，任《Journal of Family and Economic Issues》和《Academy of Marketing Studies Journal》等多种期刊的编委。

Mathematical Finance



WILEY
www.wiley.com

上架指导：数学

ISBN 978-7-111-58379-0

定价：89.00元

投稿热线：(010) 88379604
客服热线：(010) 88378991 88361066
购书热线：(010) 68326294 88379649 68995259

华章网站：www.hzbook.com
网上购书：www.china-pub.com
数字阅读：www.hzmedia.com.cn

封面设计·杨宇梅

[General Information]
书名=a
SS号=14356149